

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS D'ANALYSE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PAR M. NAVIER,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INSPECTEUR DIVISIONNAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES, ETC.

SUIVI DE NOTES,

PAR M. J. LIOUVILLE,

Membre de l'Institut (Académie des sciences), professeur à l'École Polytechnique.

PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET Vᵛᵉ DALMONT,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nᵒˢ 39 et 41.

1840.

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS D'ANALYSE,

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS.—IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

Alexander Ziwet

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS D'ANALYSE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PAR M. NAVIER,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INSPECTEUR DIVISIONNAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES, ETC.

SUIVI DE NOTES,

PAR M. J. LIOUVILLE,

Membre de l'Institut (Académie des sciences), professeur à l'École Polytechnique.

PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET V^R DALMONT,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n°s 39 et 41.

1840.

AVERTISSEMENT.

On donne ici le texte des leçons de M. Navier, tel qu'il se trouve dans les feuilles lithographiées distribuées aux élèves de l'École polytechnique. On n'a pas cru pouvoir y faire aucun changement : seulement on a profité de quelques corrections ou additions laissées par M. Navier lui-même. Les épreuves ont été revues en partie par M. Liouville et en partie par M. Catalan. Les notes placées à la fin du volume sont de M. Liouville. L'auteur aurait désiré les rendre plus nombreuses et leur donner plus d'étendue, mais ses occupations ne lui permettant pas de se livrer actuellement à ce travail, il y reviendra plus tard et en fera le sujet d'un supplément à l'ouvrage de M. Navier.

TABLE

DES MATIÈRES.

COURS DE LA PREMIÈRE ANNÉE.



TABLE

DES MATIÈRES.

COURS DE LA DEUXIÈME ANNÉE.

NOTES.



RÉSUMÉ

DES

LEÇONS D'ANALYSE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

I. DES FONCTIONS EN GÉNÉRAL.
DES FONCTIONS DÉRIVÉES ET DES DIFFÉRENTIELLES.

1. L'analyse algébrique considère les relations qui existent entre des quantités *connues* et des quantités *inconnues*, relations qui sont exprimées par des équations. Elle a pour objet principal de trouver les valeurs déterminées des inconnues qui satisfont à des équations données. En général chaque inconnue prend une valeur unique lorsque les équations sont du premier degré, ou plusieurs valeurs différentes lorsque les équations sont d'un degré plus élevé : mais ces valeurs sont toujours des quantités déterminées réelles ou imaginaires.

L'analyse différentielle et intégrale, et toutes les parties des mathématiques qui en dépendent, considèrent les relations qui existent entre les quantités *con-*

stantes (c'est-à-dire qui conservent toujours une même valeur) et les quantités *variables*. Ces relations sont toujours exprimées ou censées exprimées par des équations. Mais le nombre des quantités appelées variables étant plus grand que celui des équations, ces quantités peuvent prendre une infinité de valeurs différentes, qui sont seulement assujetties à satisfaire aux équations données.

2. Admettons que la question dont on s'occupe comporte n équations, et qu'il y ait un nombre m de variables plus grand que n. Comme n équations ne peuvent déterminer que n inconnues, il y aura $m-n$ variables dont les valeurs demeureront arbitraires. Mais quand on aura fixé ces valeurs à volonté, celles des n autres variables se trouveront entièrement déterminées. C'est ce qu'on exprime en disant que ces dernières variables sont *fonctions* des premières. En général on distingue dans chaque question : 1° *les variables indépendantes* auxquelles on peut attribuer des valeurs quelconques ; 2° les variables dont les valeurs sont déterminées quand on s'est donné celles des premières, et qui en sont des fonctions. On peut choisir à volonté celles des variables qui seront indépendantes; mais les formes du calcul exigent que ce choix étant fait, rien ne soit changé à cet égard dans le cours de l'opération ; ou du moins un tel changement exigerait des précautions et des transformations particulières.

Pour fixer les idées, considérons deux variables x, y, entre lesquelles il existe une seule équation. La valeur de l'une de ces variables, de x par exemple, peut être prise arbitrairement : mais à cette valeur arbitraire cor-

respondra toujours une valeur déterminée pour y. Ainsi x sera la variable indépendante, et y une fonction de x.

Si l'on avait trois variables x, y, z, et une seule équation entre ces variables, on pourrait regarder x et y comme indépendantes, et z serait fonction de x et y. Mais s'il existait deux équations entre x, y et z, la seule variable x serait indépendante, et les variables y et z seraient chacune fonction de x.

Ces notions s'étendront facilement aux cas où l'on aurait un plus grand nombre de variables et d'équations.

3. On exprime qu'une quantité y est fonction d'une autre quantité x (c'est-à-dire que y doit prendre une valeur déterminée quand on donne à x une valeur arbitraire) en écrivant

$$y=f(x) \text{ ou } y=F(x), \text{ etc.}$$

Lorsque z est fonction de deux variables x, y, on écrit

$$z=f(x,y) \text{ ou } z=F(x,y);$$

et ainsi de suite.

Une expression analytique formée d'une manière quelconque des variables x, y, z et d'autres quantités constantes s'exprimera donc par $F(x,y,z)$, en sorte qu'une équation quelconque entre les variables x, y, z est représentée par

$$F(x,y,z)=0.$$

Si cette équation est résolue par rapport à z, elle prendra la forme $z=f(x,y)$.

4. Soit la relation donnée,

$$y=f(x):$$

admettons que l'on attribue à la variable indépendante

x toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et considérons les valeurs correspondantes que prendra la fonction y. La géométrie donne le moyen de se représenter facilement la succession de ces valeurs. On peut prendre x pour une abscisse comptée à partir d'une origine fixe sur un certain axe, et y pour l'ordonnée correspondante comptée sur un axe perpendiculaire au premier. Les valeurs de y correspondantes à celles de x dans l'équation donnée $y=f(x)$ appartiendront à une ligne MN (*fig.* 1), dont la figure indiquera la marche des valeurs dont il s'agit. Il est nécessaire d'avoir toujours présent à l'esprit, non pas telle valeur particulière de x et la valeur correspondante de y, mais l'ensemble des valeurs correspondantes de ces deux variables.

5. Parmi les propriétés que peut offrir la fonction $y=f(x)$, ou la ligne qui représente cette fonction, la plus remarquable, celle qui est l'objet principal du calcul différentiel, et dont la considération se reproduit constamment dans toutes les applications de ce calcul à la physique et aux arts, est le degré de rapidité avec lequel la fonction varie lorsque la variable indépendante x vient à varier. Ce degré de rapidité de l'accroissement de la fonction, quand on fait croître la variable, peut différer, non-seulement d'une fonction à une autre, mais encore pour la même fonction, suivant la valeur attribuée à la variable, à partir de laquelle on suppose que l'accroissement de cette variable a lieu. Pour nous former des notions précises sur ce point, attribuons à x une valeur déterminée représentée par OP, à laquelle correspondra une valeur également déterminée $y=f(x)$, représentée par MP. Supposons

ensuite que x augmente à partir de cette valeur d'une quantité quelconque que nous désignerons par Δx, et qui sera représentée par PQ. La fonction y variera en conséquence d'une certaine quantité que nous désignerons également par y, en sorte que l'on aura

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x),$$

ou

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

La nouvelle valeur affectée par la fonction y est représentée dans la figure par NQ, et NR représente Δy ou la variation subie par cette fonction. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, dont l'expression est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

est représenté par la tangente trigonométrique de l'angle NMR formé par la sécante MN avec l'axe des x.

6. Il est visible que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est l'expression naturelle de la propriété dont nous avons parlé, c'est-à-dire du degré de rapidité avec lequel la fonction y croît quand on fait croître la variable indépendante x : car plus la valeur de ce rapport sera grande, plus l'accroissement de la fonction sera considérable quand on fera croître la variable de la quantité donnée Δx. Mais il est bien important de remarquer que la valeur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (à l'exception du seul cas où la ligne MN serait une ligne droite) dépendra non-seule-

ment de la valeur attribuée à x, c'est-à-dire du point M où l'on s'est placé sur la courbe, mais encore de la grandeur absolue attribuée à l'accroissement Δx. Si nous laissions cet accroissement arbitraire, nous serions dans l'impossibilité d'assigner au rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dont il s'agit aucune valeur précise, et il est absolument nécessaire d'adopter une convention qui fasse disparaître à cet égard toute indécision.

Supposons qu'après avoir donné à Δx une valeur quelconque, à laquelle répondra une certaine valeur pour Δy et une certaine direction de la sécante MN, on diminue progressivement la valeur de Δx, en sorte que cet accroissement finisse par devenir égal à zéro. L'accroissement correspondant Δy variera en conséquence, et tendra également en général à devenir égal à zéro. Le point N tendra à se confondre avec le point M, et la sécante MN à coïncider avec la tangente MT menée à la courbe au point M. Quant au rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ des deux accroissements, il s'approchera également d'une certaine limite, qui est représentée par la tangente trigonométrique de l'angle TMR formé par la tangente MT avec l'axe des abscisses.

Si la variation Δx était négative et diminuait l'abscisse x au lieu de l'augmenter, on pourrait faire les mêmes remarques. A mesure que la valeur absolue de cette variation serait supposée plus petite et s'approchant davantage de zéro, la variation correspondante Δy de l'ordonnée approcherait également de zéro. La sécante menée par les deux points de la courbe correspondants aux abscisses $x + \Delta x$ et x tendrait de plus en

plus à se confondre avec la tangente menée au point M correspondant à l'abscisse x. Enfin la valeur du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ des deux variations s'approcherait indéfiniment de la limite dont on a parlé ci-dessus, c'est-à-dire de la tangente trigonométrique de l'angle compris entre la tangente de la courbe et l'axe des abscisses.

7. On voit que lorsque l'accroissement Δx, et par conséquent l'accroissement correspondant Δy, diminuent progressivement et tendent à devenir égaux à zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de ces accroissements s'approche en général d'une limite dont la valeur est finie et déterminée. Or la valeur du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ correspondante à cette limite doit être considérée comme donnant la mesure véritable et précise de la propriété dont il a été question n° 5, c'est-à-dire de la rapidité avec laquelle la fonction varie quand on fait croître la variable indépendante : car il ne reste dans l'expression de cette valeur rien d'arbitraire ; elle ne dépend plus des valeurs absolues des deux accroissements Δx et Δy, ni de la figure de la courbe à une certaine distance finie de part et d'autre du point M. Elle dépend seulement de la *direction* de la courbe en ce point, c'est-à-dire de l'inclinaison de la tangente sur l'axe des abscisses. Le rapport, ainsi déterminé, exprime ce que Newton nommait la *fluxion* de l'ordonnée. Quant à la manière d'en trouver dans chaque cas particulier la valeur, il est visible qu'il suffit de considérer l'expression générale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

et de voir quelle est la limite dont cette expression s'approche à mesure que Δx prend des valeurs de plus en plus petites, et tend à devenir égale à zéro. Cette limite sera une certaine fonction de la variable indépendante x, dont la nature dépend de celle de la fonction donnée $f(x)$.

8. Il est nécessaire de distinguer le cas où l'on regarde ainsi l'accroissement Δx de la variable indépendante comme s'approchant indéfiniment de zéro, ou ayant une valeur indéterminée plus petite que tout nombre donné. Cet accroissement est dit alors infiniment petit. L'accroissement correspondant Δy a aussi alors en général une valeur plus petite que tout nombre donné, ou infiniment petite, dont le rapport avec Δx est déterminé. Ce rapport doit être regardé comme s'approchant indéfiniment de la limite dont il a été question ci-dessus, ou différant de cette limite d'une quantité moindre que tout nombre donné.

La considération de la limite dont il s'agit étant très-importante, les géomètres lui ont affecté des dénominations et des signes particuliers. Les variations Δx et Δy sont appelées en général les *différences* de la variable x et de la fonction y, parce qu'on considère Δx comme la différence de deux valeurs consécutives de x, et Δy comme la différence des deux valeurs correspondantes de y. Mais si Δx et Δy sont supposées infiniment petites, ces différences sont alors appelées les *différentielles* des variables x et y; et pour distinguer ce cas on emploie la caractéristique d à la place de Δ, en écrivant dx et dy. La limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, à mesure que Δx diffère de moins en moins de zéro, est exprimée par $\frac{dy}{dx}$.

La fonction de x qui donne la valeur de la limite $\frac{dy}{dx}$ est appelée *coefficient différentiel*, ou, d'après Lagrange, *fonction dérivée*, parce qu'elle dérive de la fonction *primitive* $f(x)$, et peut se déduire de cette fonction par des opérations déterminées.

En considérant sous ce dernier point de vue la limite dont il s'agit, Lagrange représente la fonction dérivée de y ou $f(x)$ par y' ou par $f'(x)$, notations qui sont fréquemment employées par les géomètres.

9. Remarquons que la distance NR, qui représente la différence Δy, est composée de deux parties TR et NT, qui toutes deux tendent à devenir nulles quand Δx approche d'être égal à zéro. Comme l'angle TMR a pour tangente trigonométrique la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ou $\frac{dy}{dx}$, on a TR $= \frac{dy}{dx} \Delta x$. Quant à la ligne NT, puisqu'elle devient nulle en même temps que Δx, on peut la représenter en général par $\omega \Delta x$, ω désignant une fonction de x et de Δx. Nous écrirons donc généralement

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx} + \omega\right) \Delta x, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \omega.$$

Tant que les accroissements Δx et Δy conserveront des valeurs subsistantes, aussi petites qu'on le voudra, la quantité ω conservera elle-même une valeur semblable; mais si l'on pose $\Delta x = 0$, on aura $\omega = 0$, puisque, dans cette hypothèse, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devient égal à $\frac{dy}{dx}$.

Si donc on veut indiquer que l'on considère, non pas la valeur véritable du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, mais la limite vers

laquelle tend cette valeur lorsque Δx et Δy tendent à devenir égaux à zéro, ce que l'on fait, comme on l'a dit ci-dessus, en remplaçant Δx par dx et Δy par dy, il faudra supposer ω nulle, et écrire simplement $dy = \frac{dy}{dx} dx$. C'est ce qu'on exprime en disant que la différentielle de la fonction y est égale au produit de la différentielle dx de la variable indépendante par la limite $\frac{dy}{dx}$ du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ des différences correspondantes des deux variables; et c'est par cette raison que cette limite $\frac{dy}{dx}$ est nommée *coefficient différentiel.* Le principe dont il s'agit est mis en évidence par la nature de la notation que nous présentons ici et que les géomètres ont généralement adoptée d'après Leibnitz.

10. En résumant les notions précédentes et considérant une fonction quelconque y d'une seule variable indépendante x, on doit se représenter la variable x comme croissant progressivement depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et prenant successivement des valeurs dont chacune surpasse la précédente de la quantité dx supposée infiniment petite, c'est-à-dire plus petite que toute grandeur donnée. Cette quantité dx, exprimant la différence de deux valeurs consécutives de x, peut être supposée à volonté constante ou variable dans toute l'étendue de la série. Mais quand il s'agit d'une variable indépendante, il est plus simple, et dans l'esprit du calcul différentiel, de supposer la différentielle dx constante. A mesure que l'on passe ainsi d'une valeur a de x à une autre valeur A, par un nombre infini de termes intermédiaires séparés par l'intervalle

constant dx, on passe également de la valeur b de la fonction y, correspondante à la valeur a de x, à la valeur B correspondante à la valeur A. Chaque fois que x croît de la différentielle dx, y varie de la différentielle correspondante dy, qui peut être positive ou négative. Nous regardons la différentielle dx, qui est arbitraire, comme constante, et nous lui attribuons toujours la même valeur, quelle que soit x. Mais x et dx étant données, dy dépendra de la nature de la fonction. On connaîtra cette dernière différentielle quand on aura déterminé, en fonction de la variable x, l'expression de la limite $\frac{dy}{dx}$ du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, puisque l'on a toujours $dy = \frac{dy}{dx} dx$. Cette limite $\frac{dy}{dx}$ exprime et mesure la rapidité avec laquelle la valeur de la fonction varie dans les diverses parties de son cours, à mesure que la variable varie elle-même.

11. Nous n'ajouterons ici qu'une remarque dont l'évidence est bien frappante. C'est que les différentielles indiquées ci-dessus par dx et dy représentent toujours des quantités de même nature que les quantités représentées par les variables x et y. Ainsi dans la géométrie, lorsque x représente une ligne, une aire, un volume, la différentielle dx représente elle-même une ligne, une aire ou un volume. Les différentielles sont des quantités censées plus petites que toute grandeur donnée; mais cette hypothèse n'altère point la nature de ces quantités : dx et dy sont toujours homogènes avec x et y, c'est-à-dire présentent toujours le même nombre de dimensions de l'unité au moyen de laquelle les valeurs de ces variables sont exprimées.

II. DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS SIMPLES D'UNE SEULE VARIABLE.

12. *Différentier* une fonction, que nous désignons toujours par

$$y=f(x),$$

c'est chercher l'expression de sa différentielle dy, ou de la variation infiniment petite que subira y lorsque la variable indépendante x croîtra de sa différentielle dx. D'après ce qui a été dit dans l'article précédent, cette recherche se réduit à considérer le rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

et à déterminer la limite $\frac{dy}{dx}$, dont la valeur de ce rapport s'approche indéfiniment à mesure que Δx approche de devenir égale à zéro. On aura en effet pour la différentielle cherchée

$$dy=\frac{dy}{dx}\cdot dx.$$

Or il existe dans l'analyse un petit nombre de fonctions simples ou élémentaires pour lesquelles l'expression de la limite dont il s'agit exige une recherche spéciale. Quand on l'aura effectuée pour ces fonctions, une fonction quelconque, qui sera toujours composée des premières, ne présentera plus de difficultés.

13. Ces fonctions simples sont: 1° la fonction x^m, c'est-à-dire la variable élevée à une puissance marquée par l'exposant m, qui peut représenter tout nombre constant entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

2° La fonction logarithmique, ou log. x. On sait que on entend par log. x l'exposant de la puissance à laquelle on doit élever un certain nombre constant, appelé la base du système, pour obtenir le nombre x; en sorte que a désignant cette base, on a $a^{\log. x}=x$. Par conséquent, en donnant la fonction log. x, il faut toujours donner la base a du système auquel appartient le logarithme.

3° La fonction exponentielle a^x, dans laquelle la variable est l'exposant de la puissance à laquelle un nombre constant doit être élevé.

4° Les fonctions trigonométriques sin. x et cos. x, dans lesquelles x désigne un arc quelconque compté d'une origine fixe sur la circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à l'unité.

Nous allons considérer successivement ces diverses fonctions.

1° Fonction $y=x^m$, m désignant une constante.

14. Le cas le plus simple est celui où l'exposant m est un nombre entier positif. Il est très-facile alors de trouver la différentielle de la fonction y. La formule générale, rappelée n° 12, donne

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^m-x^m}{\Delta x};$$

ou en développant le terme $(x+\Delta x)^m$ par la formule du binôme de Newton, qui est démontrée dans les éléments d'algèbre pour le cas de l'exposant m entier et positif,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}.\Delta x+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}(\Delta x)^2+\ldots\ldots+(\Delta x)^{m-1}.$$

Or, quand Δx tend à devenir nulle, tous les termes du second membre tendent également à devenir nuls, à l'exception du premier. La limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, c'est-à-dire le coefficient différentiel ou la fonction dérivée de x^m, est donc

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1};$$

et l'on a par conséquent, pour la différentielle de cette fonction,

$$dy = mx^{m-1}.\,dx.$$

15. Cette formule donne également l'expression de la différentielle demandée, quelle que soit la constante m. Pour le demontrer, observons que l'on a $(x+\Delta x)^m = \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m.x^m$, d'où il suit que la quantité $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut être mise sous la forme

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.\,x^{m-1}.$$

Soit fait pour abréger $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$. On voit qu'il s'agit de trouver la limite dont s'approche indéfiniment le rapport $\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}$ lorsque la quantité α tend à devenir égale à zéro. Or, α étant supposée infiniment petite, on peut écrire évidemment

$$(1+\alpha)^m = 1+6,$$

6 étant également une quantité infiniment petite qui deviendrait nulle en même temps que α. L'expression précédente de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devient alors

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathcal{C}}{\alpha} \cdot x^{m-1};$$

en sorte que tout se réduit à trouver la limite du rapport $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$.

16. Pour y parvenir, considérons l'expression

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

et proposons-nous de trouver la limite vers laquelle tend sa valeur lorsque α tend à devenir égale à zéro. α étant regardée comme pouvant prendre une valeur quelconque, pourvu qu'elle soit plus petite que toute grandeur donnée, on peut écrire $\alpha = \frac{1}{i}$, en désignant par i un nombre entier plus grand que tout nombre donné. L'expression dont il s'agit devient alors

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^i,$$

et en la développant par la règle du binôme, on a

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^i = 1+i.\frac{1}{i} + \frac{i(i-1)}{2} \cdot \frac{1}{i^2} + \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3} \cdot \frac{1}{i^3} + \text{etc.};$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^i = 1+1+\frac{1-\frac{1}{i}}{2} + \frac{\left(1-\frac{1}{i}\right)\left(1-\frac{2}{i}\right)}{2.3} + \frac{\left(1-\frac{1}{i}\right)\left(1-\frac{2}{i}\right)\left(1-\frac{3}{i}\right)}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Mais quand on suppose que i augmente indéfiniment, les numérateurs de chacun des termes de ce développement tendent tous à devenir égaux à l'unité. D'où l'on conclut que la limite dont s'approche indéfiniment l'ex-

pression proposée $(1+z)^{\frac{1}{z}}$, lorsque z tend à devenir nulle, est exprimée par la série

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\text{etc.}$$

Cette série est évidemment convergente, c'est-à-dire qu'en prenant un nombre de termes de plus en plus grand, les résultats approcheront continuellement d'un certain nombre irrationnel qui ne sera pas dépassé. En effet, tous les termes étant positifs, leur somme augmente progressivement à mesure que l'on en prend un plus grand nombre, et l'on distingue facilement deux limites entre lesquelles cette somme est comprise. Sa valeur est plus grande que 2, et plus petite que 2 augmenté de la progression géométrique $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\text{etc.}$ La somme de cette dernière progression étant égale à l'unité quand on la suppose prolongée à l'infini, on voit que la valeur de la série est comprise entre 2 et 3. Le calcul en est facile, et en se bornant à six décimales on trouve

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{etc.}=2,718282.$$

Ce nombre étant d'un grand usage dans l'analyse, les géomètres le représentent par la lettre e.

Il résulte donc de ce qui précède que l'expression $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ a pour limite, lorsque z tend à devenir égale à zéro, un certain nombre représenté par e, dont l'expression est

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{etc.}=2,718282;$$

et l'on peut remarquer que cette proposition subsiste également lorsque α est négatif. Car on peut écrire

$$1-\alpha=\frac{1}{1+\varepsilon},$$

ε désignant une quantité infiniment petite qui devient nulle en même temps que ; d'où l'on tire

$$(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}=(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}(1+\varepsilon):$$

la limite du second membre étant le nombre e, ce nombre est également la limite du premier membre.

17. Cela posé, revenons à l'équation écrite nº 15

$$(1+\alpha)^m=1+\beta.$$

En prenant des deux parts, dans un système quelconque, le logarithme, il viendra

$$m\log.(1+\alpha)=\log.(1+\beta),\qquad \text{d'où}\quad \frac{\log.(1+\beta)}{\log.(1+\alpha)}=m.$$

Mais en supposant α et β infiniment petits, on a à la limite

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e,\ (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}=e,$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\alpha}\log.(1+\alpha)=\log.e,\ \frac{1}{\beta}\log.(1+\beta)=\log.e,\ \text{d'où}\ \frac{\log.(1+\beta)}{\log.(1+\alpha)}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Donc

$$\frac{\beta}{\alpha}=m.$$

Ainsi l'on trouve en général pour le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ l'expression

$$mx^{m-1},$$

qui avait été obtenue dans le n° 14 pour le cas de l'exposant m entier et positif, et d'où l'on conclut

$$d(x^m)=mx^{m-1}.\,dx.$$

18. Nous remarquerons deux cas particuliers, qui se présentent fréquemment et que l'on doit avoir présents à la mémoire. 1° Lorsque $m=\frac{1}{2}$ la formule précédente donne

$$d.\sqrt{x}=d(x^{\frac{1}{2}})=\frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

2° Lorsque $m=-1$, elle donne

$$d.\frac{1}{x}=d(x^{-1})=-\frac{dx}{x^2}.$$

2° Fonction logarithmique $y=\log.\,x$.

19. La formule générale du n° 12 donne

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log.(x+\Delta x)-\log.\,x}{\Delta x}=\frac{\log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Mais d'après ce qu'on a vu n° 16, on a, lorsque Δx devient extrêmement petit, $\log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{\Delta x}{x}\log.\,e$.

Donc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\log.\,e,\qquad \text{et}\qquad dy=\frac{dx}{x}\log.e.$$

20. Le logarithme est supposé pris dans un système quelconque ; si on le prend dans le système dont la base est le nombre e, $\log.\ e=1$, et l'on a simplement

$$d.\log.\,x=\frac{dx}{x}.$$

Ce dernier système est celui des logarithmes appelés ou *hyperboliques*, ou *népériens*, du nom de Neper, inventeur des logarithmes, et qui sont généralement employés dans l'analyse. Nous les désignerons simplement par la caractéristique l, afin de les distinguer des logarithmes pris dans un système quelconque qui seront désignés par la caractéristique log. Ainsi l'on aura

$$\frac{d.\log.x}{dx}=\frac{\log.e}{x} \quad \text{et} \quad \frac{d.lx}{dx}=\frac{1}{x}.$$

3° Fonction exponentielle $y=a^x$, a désignant une constante.

21. Nous avons ici, d'après la formule du n° **12**,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}a^x.$$

Soit fait $\Delta x=\alpha$; nous pourrons écrire

$$a^\alpha=1+\beta,$$

β étant considéré, aussi bien que α, comme une quantité qui peut approcher indéfiniment de zéro. Donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\beta}{\alpha}a^x;$$

et il s'agit de connaître la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ lorsque α et β tendent à devenir nulles. Prenant des deux parts, dans un système quelconque, les logarithmes dans l'équation

$$a^\alpha=1+\beta,$$

on a

$$\alpha\log.a=\log.(1+\beta),$$

et par conséquent

$$\frac{\alpha}{\beta}\log.a=\frac{\log.(1+\beta)}{\beta}.$$

Or, d'après le n° 17, la limite de $\frac{\log.(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$ est log. e. Donc à la limite

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}=\frac{\log.a}{\log.e},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log.a}{\log.e}.a^x, \qquad \text{et} \qquad d.a^x=\frac{\log.a}{\log.e}.a^x dx.$$

22. Si les logarithmes sont hyperboliques ou népériens, log. $e=1$, et l'on a simplement

$$d.a^x=la.a^x dx.$$

Donc lorsque la constante $a=e$ (*voyez* ci-dessus n° 16),

$$d.e^x=e^x dx.$$

La fonction e^x se reproduit par différentiation, le coefficient différientiel ou la fonction dérivée ne différant point de la fonction elle-même.

Au reste, on verra, n° 35, que la différentielle de a^x peut se déduire immédiatement de celle de log. x.

4° Fonctions trigonométriques $y=\sin.x$ et $y=\cos.x$.

23. En posant

$$y=\sin.x$$

nous aurons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin.(x+\Delta x)-\sin.x}{\Delta x}=\frac{\sin.\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\cos.\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right):$$

lorsque Δx approche indéfiniment de zéro, le rapport de sin. $\frac{1}{2}\Delta x$ à l'arc $\frac{1}{2}\Delta x$ tend vers l'unité, qui est sa limite : la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est donc

$$\frac{dy}{dx}=\cos.x;$$

d'où l'on conclut que

$$d.\sin.x = \cos.x.dx.$$

De même en posant

$$y = \cos.x,$$

on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos.(x+\Delta x) - \cos.x}{\Delta x} = -\frac{\sin.\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\sin.\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right),$$

dont la limite est

$$\frac{dy}{dx} = -\sin.x; \quad \text{d'où} \quad d.\cos.x = -\sin.x.dx.$$

Ainsi la fonction dérivée de sin. x est cos. x ; et réciproquement, la fonction dérivée de cos. x est sin. x, mais pris avec le signe —.

D'ailleurs, la différentielle de sin. x étant connue, on en déduit immédiatement celle de cos. x. C'est ce qu'on verra au n° 33.

III. DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS COMPOSÉES OU FONCTIONS DE FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

24. Les fonctions dont on vient de s'occuper doivent être regardées comme les éléments simples dans lesquels se résolvent toutes les expressions de l'analyse (du moins tant que l'on ne considère pas la partie de cette science, qui est du ressort du calcul intégral). En effet, toute formule est composée des fonctions dont il s'agit, combinées entre elles, soit par le moyen des signes qui indiquent les opérations ordinaires de l'algèbre, soit par l'usage des caractéristiques log., sin., cos., que l'on peut regarder comme indiquant d'autres opérations plus com-

pliquées, et dont l'exécution a été facilitée par la construction des tables. La recherche directe de l'expression de la différentielle des trois fonctions x^m, log. x et sin. x, a dû nous occuper d'abord : on peut y ramener la détermination des deux quantités $d.\ a^x$, $d.$ cos. x que nous avons obtenues tout à l'heure par des procédés particuliers. A l'égard des autres fonctions plus composées, il existe des règles faciles, par le moyen desquelles on réduit la recherche de leur différentielle à la recherche de la différentielle d'une fonction plus simple contenue dans la première. En appliquant ces règles, on parvient progressivement aux derniers éléments dans lesquels la fonction proposée peut se résoudre, et qui se trouvent toujours (en exceptant certaines expressions dont on s'occupera en traitant du calcul intégral) l'une des fonctions simples qui ont été le sujet de l'article précédent. Sachant donc différentier ces fonctions, on sait également différentier toutes les autres.

Pour faire connaître les règles dont on vient de parler, soit en premier lieu

$$y=f(v),$$

v désignant une fonction quelconque de x. Il s'agit d'avoir la différentielle de la variable y, qui est ici ce que l'on nomme une *fonction de fonction* de la variable indépendante x; c'est à-dire la variation infiniment petite que subit y lorsque x augmente de la quantité infiniment petite dx. En revenant toujours au principe énoncé n° 12, et désignant par Δv l'accroissement de la fonction v correspondant à l'accroissement Δx de x, on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(v+\Delta v)-f(v)}{\Delta x},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(v+\Delta v)-f(v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Supposant ensuite que Δx s'approche indéfiniment de zéro, on devra à la limite remplacer $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ par $\frac{dv}{dx}$, et $\frac{f(v+\Delta v)-f(v)}{\Delta v}$ par $\frac{dy}{dv}$. Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx.$$

Ainsi le coefficient différentiel demandé $\frac{dy}{dx}$ s'obtient ici en prenant d'abord le coefficient différentiel $\frac{dy}{dv}$, comme si v désignait une variable indépendante, puis multipliant par $\frac{dv}{dx}$, qui est le coefficient différentiel de la fonction v pris par rapport à la variable indépendante x.

A cause de $\frac{dv}{dx} dx = dv$, l'équation $dy = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx$ revient à celle-ci $dy = \frac{dy}{dv} dv$ dont la forme est la même que si v était la variable indépendante. En posant, par exemple, $y = v^m$, et se rappelant la formule du nº 17, on en conclut que $d(v^m) = mv^{m-1}dv$, quelle que soit la fonction v.

25. Si l'on avait

$$y = f(p),$$

p étant fonction de v et v fonction de x, on aurait d'abord, d'après la règle précédente, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp} \frac{dp}{dx}$. Mais

d'après cette même règle $\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dv}\frac{dv}{dx}$: donc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dp}\frac{dp}{dv}\frac{dv}{dx}, \quad \text{et} \quad dy=\frac{dy}{dp}\frac{dp}{dv}\frac{dv}{dx}dx.$$

Et ainsi de suite.

26. Soit en second lieu

$$y=f(u,v),$$

u et v désignant deux variables qui sont elles-mêmes des fonctions de la variable indépendante x : il s'agit toujours de trouver le coefficient différientiel $\frac{dy}{dx}$. Remarquons que la différence Δy ou $f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u,v)$ de la fonction proposée est identiquement égale à

$$f(u+\Delta u,v)-f(u,v)+f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u+\Delta u,v).$$

Donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u,v)-f(u,v)}{\Delta x}+\frac{f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u+\Delta u,v)}{\Delta x}.$$

Quant à la limite vers laquelle tend cette expression lorsque Δx tend à devenir égale à zéro, celle du premier terme est évidemment, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, $\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$. La limite du second terme, si Δu était constante, serait $\frac{d.f(u+\Delta u,v)}{dv}\frac{dv}{dx}$: mais comme Δu devient nulle en même temps que Δx, cette dernière quantité ne diffère point de $\frac{d.f(u,v)}{dv}\frac{dv}{dx}$, ou $\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$. D'après cela

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}, \quad \text{et} \quad dy=\left(\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}\right)dx.$$

On voit donc que le coefficient différentiel demandé s'obtient en prenant successivement les coefficients diffé-

rentiels par rapport aux deux fonctions u et v, c'est-à-dire en regardant successivement u seule comme variable, et v seule comme variable, et ajoutant les résultats.

27. Si l'on avait

$$y = f(t, u, v),$$

les trois variables t, u, v étant des fonctions de la variable indépendante x, une méthode semblable (*) conduirait à l'expression

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx},$$

d'où

$$dy = \left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}\right)dx;$$

et ainsi de suite s'il y avait un plus grand nombre de fonctions dépendantes de la variable x.

Usage des règles précédentes.

28. Les seules règles qui viennent d'être exposées, réunies aux résultats présentés dans l'article II, suffisent pour trouver la différentielle d'une expression analytique quelconque. Nous ajouterons ici quelques remarques propres à faciliter ce genre d'opérations.

Lorsque la fonction est composée d'une autre fonction combinée avec une constante par addition, soustraction ou multiplication, la notion seule de la différentielle suffit pour indiquer le résultat. Ainsi

$$y = a + v \quad \text{donne} \quad dy = dv$$
$$y = a - v \qquad\qquad dy = -dv$$
$$y = av \qquad\qquad dy = adv.$$

(*) **Il faudrait observer alors que la différence Δy est identiquement égale à $f(t+\Delta t,u,v) - f(t,u,v) + f(t+\Delta t,u+\Delta u,v) - f(t+\Delta t,u,v) + f(t+\Delta t,u+\Delta u,v+\Delta v) - f(t+\Delta t,u+\Delta u,v)$.**

On a déjà vu (n_o 24) que

$$d(v^m) = mv^{m-1}.\, dv,$$

m étant une constante quelconque.

29. Lorsque la fonction est composée de plusieurs fonctions ajoutées entre elles, multipliées ou divisées les unes par les autres, le résultat se déduit de la règle des n°s 26 et 27. Désignant toujours par t, u, v des fonctions de la variable indépendante x,

$$y = u + v \quad \text{donne} \quad dy = du + dv$$
$$y = uv \qquad dy = vdu + udv$$
$$y = tuv \qquad dy = uvdt + tvdu + tudv$$
$$y = \frac{u}{v} \qquad dy = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

La dernière expression s'obtient en observant que $d.\frac{1}{v} = d.v^{-1} = -\frac{dv}{v^2}$.

Si l'on veut que la différentielle dy soit exprimée au moyen de la différentielle dx de la variable indépendante, on remplacera dt, du et dv par $\frac{dt}{dx}\,dx$, $\frac{du}{dx}\,dx$, et $\frac{dv}{dx}\,dx$.

30. Nous considérerons maintenant les combinaisons les plus simples auxquelles donne lieu l'usage des fonctions logarithmiques, exponentielles et trigonométriques, que les géomètres appellent communément *fonctions transcendantes*.

La marche à suivre pour obtenir la différentielle consiste toujours à mettre la fonction proposée sous des formes semblables à celles des fonctions générales qui ont été considérées dans les n°s 24 et suivants, c'est-à-

dire à distinguer les quantités que l'on regardera comme fonctions les unes des autres, jusqu'à ce qu'on parvienne aux fonctions les plus simples. Soit

$$y = l(lx).$$

Cette formule revient à

$$y = lv, \quad \text{et l'on a} \quad v = lx.$$

Donc, d'après les nos 20 et 24,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}, \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x.lx} \quad \text{et} \quad dy = \frac{dx}{x.lx}.$$

31. Soit

$$y = a^{b^x},$$

qui revient à

$$y = a^v, \quad \text{en posant} \quad v = b^x.$$

D'après les nos 23 et 24, on aura donc

$$\frac{dy}{dx} = la.a^v, \qquad \frac{dv}{dx} = lb.b^x,$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = la.lb.a^{b^x}.b^x, \quad \text{et} \quad dy = la.lb.a^{b^x}.b^x.dx.$$

32. Soit encore

$$y = u^v,$$

u et v désignant deux fonctions de la variable indépendante x. Appliquant la règle du n° 26, c'est-à-dire différenciant successivement par rapport à u seule et par rapport à v seule, on aura $\frac{dy}{du} = vu^{v-1}$, $\frac{dy}{dv} = lu.u^v$. Donc, en ajoutant les résultats

$$dy = u^v\left(\frac{v}{u}du + lu.dv\right).$$

33. Soit $y = \sin.(x + \frac{1}{2}\pi)$, π désignant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1 : en posant $v = x + \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$y = \sin. v,\ \frac{dy}{dv} = \cos. v,\ \frac{dv}{dx} = 1,$$

d'où résulte

$$\frac{dy}{dx} = \cos.(x + \tfrac{1}{2}\pi) = -\sin. x, \text{ et } dy = -\sin. x dx.$$

Or, le sinus de $x + \frac{1}{2}\pi$ est égal à $\cos. x$. Nous retombons donc sur la formule déjà démontrée

$$d.\cos. x = -\sin. x dx.$$

On trouve ensuite pour

$$y = \text{tang}. x = \frac{\sin. x}{\cos. x}, \qquad dy = \frac{dx}{\cos.^2 x}$$

$$y = \cot. x = \frac{\cos. x}{\sin. x} \qquad dy = -\frac{dx}{\sin.^2 x}$$

$$y = \text{séc}. x = \frac{1}{\cos. x} \qquad dy = \frac{\sin. x . dx}{\cos.^2 x}$$

$$y = \text{coséc}. x = \frac{1}{\sin. x} \qquad dy = -\frac{\cos. x . dx}{\sin.^2 x}.$$

34. En supposant

$$y = l \sin. x, \text{ on a } dy = \frac{d.\sin. x}{\sin. x} = \frac{\cos. x}{\sin. x} dx = \frac{dx}{\text{tang}. x}$$

$$y = l \cos. x \qquad dy = \frac{d.\cos. x}{\cos. x} = -\frac{\sin. x}{\cos. x} dx = -\frac{dx}{\cot. x}.$$

35. Les géomètres appellent fonction inverse de la fonction $f(v)$ la fonction de u, que l'on obtient en résolvant par rapport à v l'équation $u = f(v)$. Ainsi la fonction arc. sin. x est inverse de la fonction sin. x. On obtient facilement la différentielle de la fonction inverse

quand on connaît celle de la fonction. En effet, supposons

$$y = \text{arc.sin.}\,x,$$

et proposons-nous de trouver la différentielle dy. On a donc

$$x = \sin.y;$$

et prenant les coefficients différentiels de part et d'autre (*), en regardant dans le second nombre y comme une fonction de x, et appliquant la règle du n° 24

$$1 = \cos.y\,.\frac{dy}{dx}.$$

On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos.y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En opérant de la même manière sur les autres fonctions trigonométriques, on trouve

$$d\,\text{arc.cos.}\,x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad d.\text{arc.cot.}\,x = -\frac{dx}{1+x^2}\quad d.\text{arc.cos\'ec.}\,x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$d.\,\text{arc.sin.}\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad d.\text{arc.tang.}\,x = \frac{dx}{1+x^2},\quad d.\,\text{arc.s\'ec.}\,x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

(*) Quand deux fonctions $f(x)$, $F(x)$, sont égales entre elles, soit pour toutes les valeurs de x, soit dans une certaine étendue des valeurs de cette variable, leurs dérivées (et par suite leurs différentielles) sont aussi égales entre elles dans cette même étendue, puisque des deux équations

$$f(x) = F(x),\qquad f(x+\Delta x) = F(x+\Delta x),$$

on tire

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x},$$

d'où résulte, en passant à la limite, $f'(x) = F'(x)$, C. Q. F. D. On aurait encore $f'(x) = F'(x)$, si la différence $f(x) - F(x)$, au lieu d'être nulle, était exprimée par une constante C.

La considération des fonctions inverses pourrait servir aussi à ramener la recherche de la différentielle de a^x à celle de $\log.x$. En effet de l'équation $y=a^x$ on conclut $\log.\,y=\log.\,a\,.\,x$. Donc, en prenant la différentielle des deux membres

$$\log.e.\frac{dy}{y}=\log.a.dx,\quad \text{ou}\quad dy=\frac{\log.a}{\log.e}.\,a^x dx.$$

36. Il convient d'avoir présentes à la mémoire les expressions des différentielles très-simples que nous réunissons dans le tableau suivant :

$d(ax+b)=adx$	$d.\sin.x=\cos.y.dx$	$d.\text{arc}..\sin.x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d.x^a=ax^{a-1}dx$	$d.\cos.x=-\sin.x.dx$	$d.\text{arc}..\cos.x=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d.\frac{1}{x}=-\frac{dx}{x^2}$	$d.\text{tang}\,x=\frac{dx}{\cos.^2x}$	$d.\text{arc}..\text{tang}.x=\frac{dx}{1+x^2}$
$d.\sqrt{x}=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$	$d.\cot.x=-\frac{dx}{\sin.^2x}$	$d.\text{arc}..\cot.x=-\frac{dx}{1+x^2}$
$d.\log.x=\log.e\frac{dx}{x}$	$d.\text{séc}.\,x=\frac{\sin.x.dx}{\cos.^2x}$	$d.\text{arc}..\text{séc}.\,x=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
$d.a^x=la.a^x dx$	$d.\text{coséc}.x=-\frac{\cos.x.dx}{\text{séc}.^2x}$	$d.\text{arc}..\text{coséc}.x=-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Quant aux différentielles des fonctions plus composées, on doit les former d'après ce qui a été dit nº 30.

37. Soit par exemple

$$y=(ax^m+b)^n:$$

on décomposera cette fonction comme il suit :

$$y=u^n,\qquad u=av+b,\qquad v=x^m.$$

Appliquant les règles précédentes, il viendra

$$dy=nu^{n-1}du,\qquad du=adv,\qquad dv=mx^{m-1}dx;$$

et en substituant

$$du = a \,.\, mx^{m-1}dx$$
$$dy = n(ax^m + b)^{n-1} \,.\, amx^{m-1}dx.$$

Mais l'usage du calcul montrera bientôt qu'il est superflu de poser ces équations, et que l'on peut opérer immédiatement sur les quantités contenues dans la fonction proposée. Ainsi l'on différentiera d'abord par rapport à $ax^m + b$, ce qui donnera

$$dy = n(ax^m + b)^{n-1} \,.\, d(ax^m + b).$$

Puis pour former la différentielle $d\,(ax^m + b)$, on différentiera par rapport à x^m, ce qui donnera

$$d(ax^m + b) = a \,.\, d(x^m).$$

Enfin l'on a

$$d(x^m) = mx^{m-1}dx.$$

La substitution successive de ces valeurs conduit à celle de dy.

Soit

$$y = \sin.\, \frac{ax}{\sqrt{1 - a^2x^2}}.$$

Pour suivre l'esprit des règles énoncées, on doit donc écrire

$$y = \sin.\, t, \quad t = \frac{ax}{u}, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = 1 - a^2x^2,$$

ce qui décompose la fonction proposée dans les fonctions simples qui y sont contenues, fonctions dont on connaît immédiatement les différentielles. On aurait ainsi

$$dy = \cos.\, t\, dt, \quad dt = \frac{u \,.\, adx - ax \,.\, du}{u^2}, \quad du = \frac{dv}{2\sqrt{v}}, \quad dv = -a^2 \,.\, 2xdx,$$

et en substituant

$$du = -\frac{a^2.xdx}{\sqrt{1-a^2x^2}},$$

$$dt = \frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dy = \cos.\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}.\frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais sans poser les équations précédentes, on peut opérer immédiatement sur les fonctions contenues dans la fonction proposée. Ainsi différentiant par rapport à $\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}$, on a

$$dy = \cos.\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}.\, d\left(\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\right).$$

Considérant ensuite $\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ comme une fraction de la forme $\frac{u}{v}$, on a

$$d\left(\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-a^2x^2}.adx-ax.d\sqrt{1-a^2x^2}}{1-a^2x^2}.$$

On remarque ensuite que

$$d\sqrt{1-a^2x^2} = \frac{d(1-a^2x^2)}{2\sqrt{1-a^2x^2}},$$

et enfin que

$$d(1-a^2x^2) = -a^2.2xdx.$$

Donc en substituant chaque expression dans l'expression précédente, il vient

$$d\sqrt{1-a^2x^2} = -\frac{a^2xdx}{\sqrt{1-a^2x^2}},$$

$$d\left(\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\right) = \frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dy = \cos.\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\cdot\frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit encore

$$y = e^{au^2.\mathrm{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}},$$

e désignant, comme on l'a indiqué n° 16, la base des logarithmes népériens, et u, v deux fonctions de la variable indépendante x. Différentiant en premier lieu par rapport à au^2 tang. $\frac{u^2}{u^2+v^2}$, on a

$$dy = e^{au^2.\mathrm{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}}.\, d\left(au^2.\,\mathrm{tang.}\,\frac{u^2}{u^2+v^2}\right).$$

Le produit au^2 tang. $\frac{u^2}{u^2+v^2}$ étant différentié par rapport aux deux facteurs au^2 et tang. $\frac{u^2}{u^2+v^2}$, il vient

$$d\left(au^2.\,\mathrm{tang.}\,\frac{u^2}{u^2+v^2}\right) = \mathrm{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}\, d(au^2) + au^2.d\,\mathrm{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}.$$

On a ensuite

$$d(au^2) = a.2udu,\ \text{et}\ d\,\mathrm{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2} = \frac{d\,\frac{u^2}{u^2+v^2}}{\cos.^2\frac{u^2}{u^2+v^2}};$$

puis

$$d\,\frac{u^2}{u^2+v^2} = \frac{(u^2+v^2).2udu - u^2.d(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2};$$

et enfin

$$d\,(u^2+v^2)=2\,(udu+vdv).$$

Substituant chaque résultat dans l'expression précédente, il vient

$$d\,\frac{u^2}{u^2+v^2}=\frac{2uv(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2},$$

$$d\,\text{tang.}\,\frac{u^2}{u^2+v^2}=\frac{2uv(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2.\,\cos.^2\,\frac{u^2}{u^2+v^2}},$$

$$d\left(au^2.\text{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}\right)=2a\left(\text{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}.\,udu+\frac{u^3v(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2.\cos.^2\frac{u^2}{u^2+v^2}}\right),$$

$$dy=e^{au^2.\,\text{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}}.\,2a\left(\text{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}.\,udu+\frac{u^3v(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2.\cos.^2\frac{u^2}{u^2+v^2}}\right).$$

Afin que la différentielle demandée dy soit exprimée au moyen de la différentielle dx de la variable indépendante, on mettra ensuite à la place de du sa valeur $\frac{du}{dx}\,dx$, et à la place de dv sa valeur $\frac{dv}{dx}\,dx$.

Les exemples précédents suffisent pour faire connaître la marche de l'opération dont il s'agit, opération qu'un fréquent usage rend très-facile.

IV. DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

38. Nous concevons, en revenant aux notions présentées dans le n° 2, qu'il existe une seule équation entre plusieurs variables. Toutes les valeurs de ces variables sont alors arbitraires, à l'exception d'une seule.

La variable dont on suppose la valeur déterminée par l'équation, après que l'on s'est donné arbitrairement les valeurs de toutes les autres, est fonction de ces dernières, qui sont les variables indépendantes. Cette relation s'exprime en écrivant

$$z = f(u, v, x, y, \ldots),$$

$u, v, x, y, \ldots$ désignant les variables indépendantes, et z la variable qui est fonction des autres. On doit donc imaginer qu'à chacune des variables $u, v, x, y, \ldots$ sont attribuées toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, et se représenter la succession des valeurs correspondantes que prendra la fonction z.

39. Lorsque les variables indépendantes sont au nombre de deux seulement, et que l'on a

$$z = f(x, y),$$

la géométrie donne encore le moyen de se représenter d'une manière sensible la succession des valeurs de la fonction z. Concevons dans l'espace trois axes qui se croisent à angles droits en un point o, *fig.* 2. On regardera les variables indépendantes x et y comme deux abscisses dont les valeurs arbitraires sont portées en op et oq sur les premiers axes, et z comme une ordonnée dont la valeur déterminée par la relation $z = f(x, y)$ est portée en or sur le troisième axe. Les deux valeurs attribuées à x et y déterminent un point m situé dans le plan des xy, et en élevant au point m une perpendiculaire au plan des xy, dont la longueur mM soit égale à or, la position du point M sera telle qu'il aurait respectivement pour projections sur chacun des axes les points

p, q, r, ou qu'il serait la commune intersection de trois plans, dont le premier serait mené par le point p parallèlement au plan des yz, le second par le point q parallèlement au plan des xz, le troisième par le point r parallèlement au plan des xy. En attribuant à x et y toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, le point m prendra toutes les positions possibles dans l'étendue du plan des xy. Les valeurs de z détermineront les positions correspondantes du point M, et l'ensemble de ces positions formera une surface dont la figure fera juger de la nature de la fonction $z=f(x,y)$, et de la marche progressive de ses valeurs.

Lorsque le nombre des variables indépendantes surpasse 2, il n'est plus possible de trouver ainsi dans la géométrie une image sensible de la nature et des propriétés de la fonction. Diverses recherches de physique donnent lieu à considérer trois et même quatre variables indépendantes ; mais, lorsque le nombre de ces variables est plus considérable, les questions n'appartiennent plus qu'à l'analyse, dont rien ne restreint la généralité, et qui embrasse toutes les combinaisons auxquelles peut donner lieu la considération des grandeurs.

40. La différentiation des fonctions de plusieurs variables indépendantes dépend des mêmes notions qui ont été présentées dans les articles précédents. Chaque variable indépendante $u, v, x, y, \ldots$ est supposée croître progressivement par différences infiniment petites du, dv, dx, $dy, \ldots$ dont chacune conserve une valeur constante, mais qui n'ont entre elles aucuns rapports déterminés. La variable z varie en conséquence de la quantité infiniment petite dz, dont la valeur s'obtient toujours par

la considération de la limite du rapport des accroissements de la fonction et de chaque variable indépendante. Soit la fonction

$$z = f(x, y).$$

En supposant que x et y croissent respectivement des quantités quelconques Δx et Δy, la variation correspondante Δz de la fonction pourra se décomposer en deux parties, l'une provenant de la variation x seule, l'autre de la variation de y ; en effet on peut écrire

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)] + [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)],$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Delta z = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x + \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} \Delta y.$$

Admettons maintenant que les différences Δx et ∇y s'approchent indéfiniment de zéro, le rapport $\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ aura pour limite, conformément à ce qu'on a vu dans l'article 1, $\frac{d.f(x, y)}{dx}$; et le rapport $\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y}$ aura pour limite, d'après le même raisonnement qui a été fait dans le n° 26. $\frac{d.f(x, y)}{dy}$.

L'expression de la différentielle demandée est donc

$$dz = \frac{d.f(x, y)}{dy} dx + \frac{d.f(x, y)}{dy} dy,$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

41. Si la fonction proposée contenait trois ou un plus grand nombre de variables, on lui appliquerait les mêmes considérations ; en sorte que posant

$$z = f(v, x, y),$$

on a également

$$dz = \frac{d.f(v, x, y)}{dv} dv + \frac{d.f(v, x, y)}{dx} dx + \frac{d.f(v, x, y)}{dy} dy,$$

que l'on écrit d'une manière plus simple

$$dz = \frac{dz}{dv} dv + \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

Et ainsi de suite s'il y avait un plus grand nombre de variables.

Remarquons que, dans cette formule, le terme $\frac{dz}{dv} dv$ représente la différentielle de la fonction proposée que l'on trouverait en regardant v comme seule variable ; c'est ce que l'on nomme la *différentielle partielle* de la fonction z prise par rapport à v. De même les termes $\frac{dz}{dx} dx$ et $\frac{dz}{dy} dy$ représentent les différentielles partielles de la fonction z prises respectivement par rapport à x et à y. La somme de ces différentielles partielles forme la *différentielle totale* dz. Les fractions $\frac{dz}{dv}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ sont ici des signes analytiques qui représentent respectivement les coefficients différentiels de la fonction z pris en regardant v seule comme variable, x seule comme variable, y seule comme variable. Le dz qui est au numérateur représente la différentielle partielle de z prise par rapport à v, à x ou à y, et ne doit pas être confondu avec

le dz qui est dans le premier membre de l'équation, et qui représente la différentielle totale de la fonction z.

Remarquons que, d'après l'indépendance des valeurs des variables v, x, y, rien n'oblige à supposer qu'elles varient toutes à la fois. Ainsi celui qui demande la différentielle de la fonction $z = f(v, x, y,)$ indiquera si cette différentielle doit être *totale*, auquel cas elle est exprimée généralement par la formule précédente, ou bien si elle doit être prise par rapport à une, ou à quelques-unes seulement des variables. On supprimerait alors, dans la formule dont il s'agit, les termes relatifs aux variables qui seraient censées ne point subir d'accroissements.

42. La différentiation des fonctions de plusieurs variables indépendantes étant ramenée, d'après ce qui précède, à différentier la fonction par rapport à une des variables seule, on appliquera sans difficulté, dans chaque cas particulier, les règles exposées dans l'article précédent.

43. Lorsque la fonction proposée ne contient que deux variables indépendantes, comme

$$z = f(x, y),$$

les diverses parties de la différence totale

$$dz = \frac{dz}{dx} dz + \frac{dz}{dy} dy$$

sont représentées par la géométrie, conformément à ce qu'on a vu n° 39. Soit m (fig. 3) le point du plan des xy, dont les coordonnées op, oq représentent x et y, et M le point de la surface projetée en m, dont l'ordonnée

or représente la valeur de fonction z. Les accroissements Δx et Δy seront représentés par $m\mu'$ et $m\mu''$. Soit $m'n'$ la projection sur le plan des xz de la courbe d'intersection de la surface par un plan mené par le point M parallèlement au plan des xz. Soit également $m'n'$ la projection sur le plan des yz de la courbe d'intersection de la surface par un plan mené par le point M parallèlement au plan des yz. Il est visible que $n'r'$ représente la variation que subirait l'ordonnée z, si l'abscisse x seule croissait de Δx ou $m\mu'$; et que $n''r''$ représente la variation que subirait cette même ordonnée si l'abscisse y seule croissait de Δy ou $m\mu''$. La variation totale de l'ordonnée z, c'est-à-dire celle qui résulte de l'accroissement simultané des deux abscisses, est représentée par la différence entre l'ordonnée du point M de la surface qui se projette en m et l'ordonnée du point de cette même surface qui se projette en n. Lorsque les accroissements sont supposés infiniment petits, $n'r'$ exprime la partie $\frac{dz}{dx}dx$ de la différentielle totale, et le coefficient différentiel $\frac{dz}{dx}$ pris par rapport à x est représenté par la tangente trigonométrique de l'angle $n'm'r'$. De même $n''r''$ représente la partie $\frac{dz}{dy}dy$ de la différentielle totale, et le coefficient différentiel $\frac{dz}{dy}$ pris par rapport à y est représenté par la tangente trigonométrique de l'angle $n''m''r''$. On voit que, dans le cas des accroissements infiniment petits, la variation de l'ordonnée z, lorsqu'on passe du point de la surface projeté en m au point projeté en n, est toujours la somme des variations qui ont lieu respectivement quand

on passe du point projeté en m aux deux points projetés en μ' et μ''. On reviendra dans la suite sur ces considérations, auxquelles il sera donné un plus grand développement.

V. DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLICITES.

44. Une fonction est appelée *explicite* lorsque son expression analytique est donnée au moyen des quantités constantes et variables dont dépend sa valeur. Ainsi l'on dit que la fonction z des deux variables x, y est explicite, ou que cette fonction est donnée *explicitement*, si l'ôn a l'équation

$$z = f(x, y).$$

Mais si la fonction z est engagée avec les variables x, y dans une équation telle que

$$F(x, y, z) = o,$$

qui n'est point résolue par rapport à z, cette fonction est alors appelée *implicite*, et l'on dit que sa valeur est donnée *implicitement* ; on entend par cette expression que la valeur de la fonction z, quoique déterminée quand on a fixé celle des variables x et y, n'est point représentée par une expression analytique formée de ces variables. On peut différentier les fonctions implicites aussi facilement que les autres, c'est-à-dire obtenir l'expression de la différentielle de la fonction sans résoudre l'équation dans laquelle elle est engagée.

Revenons aux notions qui ont été présentées dans le n° 2. La nature de chaque question détermine toujours le nombre des variables, aussi bien que les variations

qui existent entre elles, et qui sont exprimées par des équations. Le nombre des variables étant m, et le nombre des équations étant n, $m-n$ des variables sont indépendantes ; les n autres variables sont fonctions des premières. On a distingué celles des variables qui sont regardées comme indépendantes, et celles qui en sont des fonctions ; et cette distinction subsiste dans tout le cours de l'opération sans aucun changement.

Cela posé, considérons d'abord le cas simple d'une seule variable indépendante x et de la fonction y, entre lesquelles il existe l'équation

$$f(x,y) = o.$$

Cette équation devant subsister, quelle que soit la valeur attribuée à x, on aura évidemment

$$f(x+\Delta x, y+y) = o,$$

en désignant toujours par Δy la variation de la fonction y, correspondant à l'accroissement Δx attribué à x. On aura donc aussi

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta x} = o,$$

équation qui subsistera, quelle que soit Δx, et, par conséquent, qui aura lieu pour la limite vers laquelle tend le premier membre, lorsque Δx tend à devenir égale à zéro. Or, cette limite n'est autre chose que le coefficient différentiel $\frac{d.f(x,y)}{dx}$ du premier membre de l'équation proposée, dont l'expression est ici, d'après le n° 26 et en remarquant que y est fonction de la variable indépen-

dante x, $\frac{d.f(x,y)}{dx} + \frac{d.f(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. On a donc l'équation

$$\frac{d.f(x,y)}{dx} + \frac{d.f(x,y)}{dy} \frac{dy}{dx} = o,$$

que l'on écrit souvent pour abréger

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} = o,$$

en indiquant seulement par la lettre f la fonction proposée $f(x, y)$, et dont on déduit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

pour l'expression du coefficient différentiel ou de la fonction dérivée de y.

Nous remarquerons d'ailleurs que ce coefficient différentiel se trouvera exprimé au moyen des deux variables x et y.

La quantité $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx}$ n'est autre chose que la différentielle de la fonction f, où l'on a supprimé le facteur constant dx. Cette différentielle est égale à zéro, et il est évident, en effet, que l'équation $f(x, y) = o$ devant subsister pour une valeur quelconque de x, l'expression d'une variation finie ou infiniment petite que subit la fonction $f(x, y)$, par l'effet d'un accroissement fini ou infiniment petit attribué à x, doit être nulle. En général, l'équation $f = o$, f désignant une fonction quelconque de plusieurs variables, entraîne toujours l'équa-

tion $df=o$, en désignant par df la différentielle de la fonction f, qui peut être totale ou partielle.

45. Considérons maintenant le cas général où l'on aurait plusieurs fonctions et plusieurs variables indépendantes. Soient, par exemple, les deux équations

$$f(v, x, y, z) = o$$
$$F(v, x, y, z) = o,$$

dans lesquelles v et x soient des variables indépendantes, y et z des fonctions de v et x, données implicitement par ces équations. Les différentielles des deux fonctions f et F devant être nulles d'après ce qui vient d'être dit, on aura en les prenant conformément aux règles exposées dans les articles précédents, et se rappelant que y et z sont fonctions de v et x,

$$\left(\frac{df}{dv}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dv}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dv}\right)dv+\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx=o$$
$$\left(\frac{dF}{dv}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dv}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dv}\right)dv+\left(\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx=o.$$

Dans chacune de ces équations, l'on peut supposer séparément $dv=o$, ou $dx=o$. Elles équivalent donc à quatre équations distinctes qui déterminent les valeurs des quatre coefficients différentiels partiels $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dv}$, $\frac{dz}{dx}$. Ces coefficients différentiels se trouvent exprimés au moyen des quatre variables v, x, y, z.

Les valeurs des coefficients différentiels partiels des fonctions y et z étant ainsi obtenues, on formera les différentielles totales de ces fonctions, en substituant les valeurs dont il s'agit dans les expressions générales

$$dy=\frac{dy}{dv}dv+\frac{dy}{dx}dx,\quad dz=\frac{dz}{dv}dv+\frac{dz}{dx}dx.$$

Ces considérations s'étendront facilement aux cas où il y aurait un plus grand nombre de variables et d'équations.

VI. DIFFÉRENTIELLES DES DIVERS ORDRES POUR LES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

46. Nous considérons en premier lieu une seule variable indépendante x et la fonction y dépendante de cette variable, en écrivant toujours

$$y=f(x);$$

et pour rendre les notions plus sensibles, nous supposons que l'on ait sous les yeux la représentation géométrique de la fonction, conformément à ce qui a été dit n° 5. L'abscisse OP, *fig.* 4, représente x, et l'ordonnée PM représente y.

Cela posé, admettons que x croisse de la quantité quelconque Δx représentée par PP'. La nouvelle valeur de y, que nous désignerons par y_1, sera représentée par P'M', et M'Q représentera Δy.

On aura

$$\Delta y=y_1-y.$$

Supposons ensuite que x croisse encore à partir de la valeur OP' de la même quantité Δx, qui sera représentée par P'P''=PP'. La nouvelle valeur de y, que nous désignerons par y_2, sera représentée par P''M'', et M''Q' représentera Δy_1. On aura

$$\Delta y_1=y_2-y_1.$$

Remarquons que si l'on prolonge la sécante MM' jusqu'en S, l'intervalle SQ' sera égal à M'Q ou Δy. Donc

M″S représente la différence de Δy_1 et Δy. Comme on a représenté par Δy la différence des deux valeurs de y qui répondent à x et $x+\Delta x$ l'analogie conduit à représenter par $\Delta\Delta y$ ou par $\Delta^2 y$ la différence des deux valeurs de Δy qui répondent à x et $x+\Delta x$. Nous écrivons donc

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y.$$

On acquiert une idée plus nette des quantités que nous considérons ici en formant le tableau suivant :

VALEURS DE x.	VALEURS CORRESPONDANTES DE y.	DIFFÉRENCES DE CES VALEURS.	DIFFÉRENCES DES DIFFÉRENCES.
x	y		
$x+\Delta x$	y_1	$\Delta y = y_1 - y$	
$x+2\Delta x$	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y$

Nous ajouterons que les géomètres nomment Δy la *différence première* ou la *différence du premier ordre* de la fonction y ; et $\Delta^2 y$ la *différence seconde* ou la *différence du second ordre* de cette même fonction.

47. Admettons maintenant que la différence Δx de la variable indépendante diminue progressivement, et tende à devenir égale à zéro. Les deux points M′, M″ tendront à se confondre avec le point M ; les deux valeurs y_1 et y_2 à devenir égales à y; et les trois différences Δy, Δy_1, et $\Delta^2 y$ à devenir en même temps égales à zéro. Mais il est bien important de remarquer que la différence seconde $\Delta^2 y$ diminuera beaucoup plus rapidement que les différences premières Δy et Δy_1 ; en sorte que

Δx, Δy et Δy_1 étant devenues très-petites par rapport à l'unité, $\Delta^2 y$ sera devenue très-petite par rapport à Δx, Δy ou Δy_1.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que l'exposition de $\Delta^2 y$ peut s'écrire ainsi

$$\Delta^2 y = \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

Or, en supposant que Δx décroisse et tende à devenir nulle, les quantités $\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ s'approcheront toutes deux de la même limite, qui est $\frac{dy}{dx}$. Donc la valeur de $\Delta^2 y$, formée de deux facteurs qui ont pour limite commune o, diminuera beaucoup plus rapidement que l'un de ces facteurs, et quand tous deux seront très-petits, sera elle-même très-petite par rapport à l'un ou à l'autre.

48. La même expression de $\Delta^2 y$ peut aussi s'écrire

$$\Delta^2 y = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}(\Delta x)^2.$$

Lorsque Δx diminue en s'approchant de zéro et devient plus petite que toute grandeur donnée, ce que nous exprimons en représentant cette différence par dx, chacune des quantités $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ a pour limite le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$; et le rapport $\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}$ a pour limite le coefficient différentiel de la fonction $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$.

Ainsi, en représentant par d^2y ce que devient $\Delta^2 y$ lorsque Δx devient dx, on a

$$d^2y = \frac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx}(dx)^2.$$

d^2y est appelé la *différentielle du second ordre* de la fonction y. Nous remarquerons d'ailleurs que l'on est dans l'usage d'écrire simplement Δx^2 ou dx^2 pour exprimer le carré de Δx ou de dx. Il n'est point à craindre que l'expression dx^2 soit confondue avec la différentielle de la fonction x^2, qui serait représentée par $d\,(x^2)$, ou par $d.x^2$.

La fonction $\frac{dy}{dx}$ est le *coefficient différentiel du premier ordre* de la fonction y, et $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$ est le *coefficient différentiel du second ordre* de cette même fonction. L'analogie conduit à le représenter d'une manière plus simple en écrivant $\frac{d^2y}{dx^2}$. Ainsi la différentielle du second ordre est exprimée par

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx^2}dx^2,$$

c'est-à-dire qu'elle est égale au produit du carré de dx par le coefficient différentiel du second ordre de la fonction proposée; ou par la fonction que l'on trouverait en prenant, conformément aux règles de l'article III, le coefficient différentiel de y, puis le coefficient différentiel de celui-ci.

Lorsqu'on exprime d'après Lagrange le coefficient dif-

férentiel ou la fonction dérivée du premier ordre par y' ou par $f'(x)$, on exprime de même le coefficient différentiel ou la fonction dérivée du second ordre par y'' ou par $f''(x)$.

49. Il est évident, d'après ce qui précède, que l'on obtiendra la différentielle du second ordre de la fonction proposée en différentiant deux fois de suite cette fonction, la différentielle dx étant regardée dans la seconde différentiation comme un facteur constant.

50. Nous pouvons supposer le tableau du n° 46 continué en considérant quatre valeurs consécutives de x séparées par l'intervalle constant Δx, ce qui donnera

VALEURS DE x.	VALEURS CORRES-PONDANTES DE y.	DIFFÉRENCES PREMIÈRES.	DIFFÉRENCES SECONDES.	DIFFÉRENCES TROISIÈMES.
x	y			
$x+\Delta x$	y_1	$\Delta y=y_1-y$		
$x+2\Delta x$	y_2	$\Delta y_1=y_2-y_1$	$\Delta^2 y=\Delta y_1-\Delta y$	
$x+3\Delta x$	y_3	$\Delta y_2=y_3-y_2$	$\Delta^2 y_1=\Delta y_2-\Delta y_1$	$\Delta^3 y=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y$

On remarquera également que quand Δx tend à devenir nulle, les valeurs de y_1, y_2, y_3 tendent à devenir égales à y, et que les différences premières, secondes et troisièmes tendent aussi toutes à devenir nulles. Mais de même que $\Delta^2 y$ diminue beaucoup plus rapidement que Δy, il est facile de voir que $\Delta^3 y$ diminue beaucoup plus rapidement que $\Delta^2 y$. En effet, l'expression de $\Delta^3 y$ peut s'écrire

$$\Delta^3 y = \left(\frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)\Delta x^2$$

ou bien

$$\Delta^3 y = \left(\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}\right)\Delta x^2.$$

Or, à mesure que x tend à devenir égal à zéro les deux termes $\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2}$ et $\frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}$ s'approchent tous deux d'une même limite, qui est $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Donc la valeur de $\Delta^3 y$ est formée de trois facteurs qui ont pour limite commune o, et par conséquent diminue beaucoup plus rapidement que $\Delta^2 y$, qui est seulement formée de deux facteurs ayant o pour limite. Ainsi, lorsque Δy sera très-petite par rapport à l'unité, $\Delta^2 y$ sera très-petite par rapport à Δy, et $\Delta^3 y$ très-petite par rapport à $\Delta^2 y$.

51. En mettant d'ailleurs $\Delta^3 y$ sous la forme

$$\Delta^3 y = \frac{\dfrac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \dfrac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}}{\Delta x}\,\Delta x^3,$$

on voit que Δx diminuant et devenant plus petite que toute grandeur donnée, chacune des quantités $\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2}$ et $\frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}$ a pour limite le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2 y}{dx^2}$; et que le rapport $\frac{\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}}{\Delta x}$ a pour limite le coefficient différentiel de la fonction $\frac{d^2 y}{dx^2}$, c'est-à-dire $\frac{d\frac{d^2 y}{dx^2}}{dx}$. On a donc, en représentant

par d^3y, ce que devient Δ^3y, lorsque Δx devient dx,

$$d^3y = \frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}\,dx^3,$$

expression qui s'écrit d'une manière plus simple

$$d^3y = \frac{d^3y}{dx^3}\,dx^3.$$

d^3y est la *différentielle du troisième ordre* de la fonction proposée y, et la fonction $\frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}$ ou $\frac{d^3y}{dx^3}$ est le *coefficient différentiel du troisième ordre* de cette même fonction La différentielle du troisième ordre est égale au produit du cube de dx par le coefficient différentiel du troisième ordre.

Le coefficient différentiel du troisième ordre s'exprime également par y''' ou par $f'''(x)$.

52. On obtiendra évidemment la différentielle du troisième ordre d'une fonction proposée en différentiant trois fois de suite cette fonction, la différentielle dx étant regardée dans la seconde et dans la troisième différentiation comme un facteur constant.

53. Si l'on considérait cinq valeurs consécutives de la variable indépendante, et les cinq valeurs correspondantes de la fonction y, on se trouverait conduit à la différence du quatrième ordre Δ^4y, dont l'expression serait composée de quatre facteurs, qui tous tendraient à devenir nuls lorsque Δx tendrait elle-même à devenir nulle. Cette différence quatrième diminuerait donc, lorsque Δx approcherait de zéro, beaucoup plus rapide-

ment que la différence troisième, qui n'est composée que de trois facteurs ayant zéro pour limite. En désignant par d^4y ce que devient Δ^4y lorsque Δx prend la valeur infiniment petite désignée par dx, on aurait

$$d^4y = \frac{d^4y}{dx^4}dx^4,$$

$\frac{d^4y}{dx^4}$ représentant le coefficient différentiel du quatrième ordre de la fonction proposée, c'est-à-dire le résultat que l'on obtient en différentiant quatre fois de suite cette fonction, dx étant regardée comme un facteur constant, puis divisant par dx^4.

Et ainsi de suite, en considérant un plus grand nombre de valeurs, et des différences d'un ordre plus élevé.

54. On voit par ce qui précède qu'une fonction quelconque $y=f(x)$ peut être regardée comme donnant naissance à une suite indéfinie de différentielles représentées par

$$dy = \frac{dy}{dx}dx, \quad d^2y = \frac{d^2y}{dx^2}dx^2, \quad d^3y = \frac{d^3y}{dx^3}dx^3, \text{ \&c},$$

qui se déduisent de la fonction même et les unes des autres par l'opération que nous avons appelée différentiation. L'expression de ces différentielles met d'ailleurs en évidence la subordination de leurs valeurs, puisque les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., qui sont des fonctions finies de la variable x, s'y trouvent multipliés par des puissances de plus en plus élevées de la quantité infiniment petite dx. Cette subordination existe, bien que toutes les différentielles dy, d^2y, d^3y, etc., soient également regardées comme des quantités qui

diffèrent de zéro moins que toute grandeur donnée. En effet, la supposition que dx diffère de zéro moins que toute grandeur donnée, ou que dx est infiniment petite, entraîne celle que les rapports de d^2y à dy, de d^3y à d^2y, etc., diffèrent aussi de zéro moins que toute grandeur donnée; c'est ce que l'on exprime en disant que ces quantités sont infiniment petites les unes par rapport aux autres, ou qu'elles forment une suite d'infiniment petits d'un ordre de plus en plus élevé.

55. Nous remarquerons qu'en supposant la fonction $y=f(x)$ représentée par l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse, la direction de la courbe et le côté de la figure vers lequel elle présente sa convexité sont déterminés, dans une étendue fort petite de part et d'autre du point m, par le signe seul des deux différentielles du premier et du second ordre dy et d^2y; c'est-à-dire par le signe seul des coefficients différentiels ou fonctions dérivées du premier et du second ordre $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$. Les diverses combinaisons qui peuvent exister à cet égard sont indiquées dans les figures 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

Fig. 5 et *fig.* 6, les coefficients différentiels sont positifs; *fig.* 7 et *fig.* 8, $\frac{dy}{dx}$ est négatif et $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif; *fig.* 9 et *fig.* 10, $\frac{dy}{dx}$ est positif et $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif; *fig.* 11 et *fig.* 12, les deux coefficients différentiels sont négatifs. On voit que $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif quand la courbe présente sa convexité au bas de la page, et négatif lorsque la courbe présente sa concavité au bas de la page. On suppose ici, suivant l'usage ordinaire, les y positives portées de bas en haut.

Différentielles des divers ordres des fonctions simples.

56. Nous appliquerons les notions précédentes aux fonctions simples, dont la différentiation est l'objet de l'article II.

En considérant, en premier lieu, la fonction x^m, on a

$$\frac{d.x^m}{dx} = mx^{m-1},$$

$$\frac{d^2.x^m}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

$$\frac{d^3.x^m}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$

$$\frac{d^4.x^m}{dx^4} = m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4},$$

Etc.

Cette suite de coefficients différentiels se prolongera à l'infini si le nombre m est négatif, ou si, étant positif, il est irrationnel ou seulement fractionnaire. Mais si m est un nombre entier positif, on a

$$\frac{d^m.x^m}{dx^m} = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots.3.2.1.$$

La fonction se trouvant réduite à une constante, les coefficients différentiels suivants sont alors nuls.

57. La fonction log. x, le logarithme étant pris dans un système quelconque, ou dans le système des logarithmes népériens, donne

$$\frac{d.\log.x}{dx}=\frac{\log.e}{x}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d.lx}{dx}=\frac{1}{x},$$

$$\frac{d^2.\log.x}{dx^2}=-\frac{\log.e}{x^2}, \qquad \frac{d^2.lx}{dx^2}=-\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{d^3.\log.x}{dx^3}=\frac{2.\log.e}{x^3}, \qquad \frac{d^3.lx}{dx^3}=\frac{2}{x^3},$$

$$\frac{d^4.\log.x}{dx^4}=-\frac{2.3.\log.e}{x^4}, \qquad \frac{d^4.lx}{dx^4}=-\frac{2.3}{x^4},$$

$$\frac{d^5.\log.x}{dx^5}=\frac{2.3.4.\log.e}{x^5}, \qquad \frac{d^5.lx}{dx^5}=\frac{2.3.4}{x^5},$$

Etc. Etc.

58. Les fonctions a^x et a^{-x} donnent

$$\frac{d.a^x}{dx}=la.a^x, \qquad \frac{d.a^{-x}}{dx}=-la.a^{-x},$$

$$\frac{d^2.a^x}{dx^2}=(la)^2.a^x, \qquad \frac{d^2.a^{-x}}{dx^2}=(la)^2.a^{-x},$$

$$\frac{d^3.a^x}{dx^3}=(la)^3.a^x, \qquad \frac{d^3.a^{-x}}{dx^3}=-(la)^3.a^{-x},$$

Etc. Etc.

Et si le nombre a devient e, ou la base des logarithmes népériens, on a

$$\frac{d.e^x}{dx}=e^x, \qquad \frac{d.e^{-x}}{dx}=-e^{-x},$$

$$\frac{d^2.e^x}{dx^2}=e^x, \qquad \frac{d^2.e^{-x}}{dx^2}=e^{-x},$$

$$\frac{d^3.e^x}{dx^3}=e^x, \qquad \frac{d^3.e^{-x}}{dx^3}=-e^{-x},$$

Etc. Etc.

La différentiation, comme on l'a déjà remarqué n°22, reproduit constamment la fonction e^x, et plus généralement

la fonction be^x qui seule présente cette propriété. Lorsque l'exposant variable x est affecté du signe —, la fonction primitive est également reproduite, mais les coefficients différentiels sont alternativement négatifs et positifs.

59. On trouve pour les fonctions trigonométriques sin. x et cos. x

$$\frac{d.\sin.x}{dx} = \cos.x = \sin.\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{d.\cos.x}{dx} = -\sin.x = \cos.\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2.\sin.x}{dx^2} = -\sin.x = \sin.(x+\pi), \quad \frac{d^2.\cos.x}{dx^2} = -\cos.x = \cos.(x+\pi),$$

$$\frac{d^3.\sin.x}{dx^3} = -\cos.x = \sin.\left(x+\frac{3\pi}{2}\right), \quad \frac{d^3.\cos.x}{dx^3} = \sin.x = \cos.\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^4.\sin.x}{dx^4} = \sin.x = \sin.(x+2\pi), \quad \frac{d^4.\cos.x}{dx^4} = \cos.x = \cos.(x+2\pi),$$

$$\frac{d^5.\sin.x}{dx^5} = \cos.x = \sin.\left(x+\frac{5\pi}{2}\right), \quad \frac{d^5.\cos.x}{dx^5} = -\sin.x = \cos.\left(x+\frac{5\pi}{2}\right).$$

Etc. Etc.

Les fonctions primitives reviennent après deux différentiations affectées du signe —. Après quatre différentiations, elles reviennent avec leur signe.

60. On doit avoir présentes à l'esprit ces propriétés remarquables. Il est également utile de connaître la figure des courbes qui représentent les fonctions simples dont il s'agit : pour la discussion de ces courbes l'expression des coefficients différentiels des deux premiers ordres donne de grandes facilités, conformément à ce qui a été dit nº 55.

Soit en premier lieu

$$y = x^m,$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}.$$

La courbe, dont x est l'abscisse et y l'ordonnée, présentera diverses figures, suivant la nature de l'exposant m. Nous supposerons d'abord cet exposant positif et plus grand que l'unité.

1° Si m est un nombre entier pair, y est positive quel que soit le signe de x. $\frac{dy}{dx}$ change de signe avec x, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est toujours positif. La courbe est représentée par la *fig.* 13.

2° Si m est un nombre entier impair, y change de signe avec x, $\frac{dy}{dx}$ est constamment positif, $\frac{d^2y}{dx^2}$ change de signe avec x. La courbe est représentée par la *fig.* 14.

3° Si m est un nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$, p et q étant entiers, la courbe est représentée par la *fig.* 13 lorsque p est pair et q impair, et par la *fig.* 14 lorsque p est impair et q impair. Mais si q est pair, la partie située du côté des x négatives n'existe pas, les valeurs de y correspondantes aux valeurs négatives de x étant alors imaginaires.

61. En supposant, en second lieu, l'exposant m positif et plus petit que l'unité, ce cas différera du précédent, en ce que $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera négatif lorsque dans le cas précédent il était positif, et positif quand il était négatif.

La *fig*. 13 sera remplacée par la *fig*. 15, et la *fig*. 14 par la *fig*. 16.

62. En admettant maintenant que l'exposant m soit négatif, c'est-à-dire que l'on ait

$$y=\frac{1}{x^m},$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{m}{x^{m+1}},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{m(m+1)}{x^{m+2}},$$

m étant un nombre positif, on passera facilement des cas précédents à ceux qui répondent à cette dernière supposition, en divisant l'unité par les ordonnées des courbes que représentent les *fig*. 13 et 14, 15 et 16. Les *fig*. 13 et 15 seront remplacées par la *fig*. 17, et les *fig*. 14 et 16 par la *fig*. 18. Les axes sont ici des asymptotes aux branches de la courbe.

63. Pour la fonction logarithmique, nous avons

$$y=\log.x,$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log.e}{x},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\log.e}{x^2}.$$

La courbe (*fig*. 19) a l'axe des y pour asymptote du côté des y négatives. L'abscisse oA du point où elle coupe l'axe des x est égale à l'unité. Il n'y a point de branche de la courbe du côté des x négatives.

64. La fonction exponentielle a^x donne

$$y = a^x,$$

$$\frac{dy}{dx} = la.a^x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (la)^2.a^x.$$

a étant un nombre positif et plus grand que l'unité, la valeur de l'ordonnée croît indéfiniment du côté des x positives; mais la courbe (*fig.* 20) a l'axe des x pour asymptote du côté des x négatives. L'ordonnée oB, du point où elle coupe l'axe des y est égale à l'unité.

Si l'on supposait a positif et plus petit que l'unité, la fonction a^x se changerait alors en $\left(\frac{1}{a}\right)^x$, ou a^{-x}, a étant supposé comme ci-dessus plus grand que l'unité. Ainsi, ce cas revient au précédent en changeant les x positives pour les x négatives, et réciproquement.

Comme l'équation $y=a^x$ entraîne d'ailleurs $x=\log. y$, a étant pris pour la base du système de logarithmes, il est visible que la courbe dont il s'agit ne diffère point de celle du numéro précédent, lorsqu'on change l'un pour l'autre les axes des x et des y.

Si l'on voulait prendre pour a dans la fonction a^x un nombre négatif, cette fonction cesserait de présenter des valeurs continues : il n'existerait plus de courbe, mais seulement des points isolés correspondants aux valeurs de x égales à des nombres entiers ou à des fractions de dénominateur impair. Nous supposerons toujours, dans la suite, par cette raison, quand il s'agira d'un système quelconque de logarithmes, que la base a de ce système est un nombre positif et plus grand que l'unité.

65. Soit encore la fonction $y = e^{-x^2}$ qui se présente dans plusieurs applications importantes. Elle donne

$$y = e^{-x^2},$$
$$\frac{dy}{dx} = -2x.e^{-x^2},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

La courbe (*fig.* 21) est formée de deux branches égales situées de part et d'autre de l'axe des y. L'ordonnée oB du point où elle coupe cet axe est égale à l'unité.

Le coefficient du premier ordre $\frac{dy}{dx}$ change de signe avec l'abscisse x. Le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif, lorsque x est plus petite que la distance $o\text{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et positif lorsque x dépasse cette distance. Ainsi la courbe présente sa concavité au bas de la page dans l'intervalle MM, et au delà de cet intervalle elle y présente sa convexité. Les points M, dans lesquels la valeur du coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$ change de signe, et pour lesquels la valeur de ce coefficient différentiel est nulle, sont nommés *points d'inflexion*.

66. Considérons enfin les fonctions trigonométriques. On a

$$y = \sin. x,$$
$$\frac{dy}{dx} = \cos. x,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin. x.$$

La courbe (*fig.* 22) coupe l'axe des x aux points où l'abscisse est égale aux arcs o, π, 2π, 3π, etc. Dans ces points, la tangente forme avec les axes un angle égal à la moitié de l'angle droit, puisque l'on a $\frac{dy}{dx}=\pm 1$. Les plus grandes ordonnées, dont la valeur est l'unité, répondent aux points M, dont l'abscisse est égale aux arcs $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, etc. Le signe du coefficient différentiel du second ordre étant contraire à celui de l'ordonnée, la courbe présente sa convexité au bas de la page quand l'ordonnée est positive, et réciproquement. Les points où l'ordonnée est nulle sont les points d'inflexion. Cette courbe se prolonge indéfiniment, soit du côté des x positives, soit du côté des x négatives, en présentant une suite de parties identiquement égales à celles qui sont comprises dans l'intervalle de o à 2π. C'est ce qu'on exprime en disant que la fonction est *périodique*.

67. On a également

$$y = \cos. x,$$
$$\frac{dy}{dx} = -\sin. x,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos. x.$$

Il est assez visible que la figure de la courbe est parfaitement égale à la précédente, dans laquelle on aurait *déplacé* l'origine des abscisses x de l'intervalle $\frac{\pi}{2}$, puisque l'on a toujours

$$\cos. x = \sin. \left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

VII. DIFFÉRENTIELLES DES DIVERS ORDRES POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

68. La notion des différentielles des ordres supérieurs s'étend facilement aux fonctions de plusieurs variables, puisque la différentiation de ces fonctions s'effectue toujours en opérant séparément par rapport à chacune des variables.

Soit en premier lieu, comme dans le n° 40, la fonction

$$z = f(x, y),$$

x et y étant deux variables indépendantes. On a vu que l'on obtenait pour cette fonction la différentielle du premier ordre *totale* exprimée par

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

et formée de la somme des *différences partielles* $\frac{dz}{dx}dx$, et $\frac{dz}{dy}dy$, prises respectivement en regardant x seule comme variable et y seule comme variable. Les fonctions désignées par $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont les coefficients différentiels partiels du premier ordre de la fonction z pris respectivement par rapport à x et par rapport à y.

L'opération de la différentiation peut également s'appliquer à l'expression de dz, dans laquelle on regardera dx et dy comme des facteurs constants. Si l'on veut former la différentielle totale, il faudra différentier successivement les fonctions $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ par rapport à x et par

rapport à y. On aura donc pour la différentielle totale du second ordre

$$d^2z=\left(\frac{d\frac{dz}{dx}}{dx}dx+\frac{d\frac{dz}{dx}}{dy}dy\right)dx+\left(\frac{d\frac{dz}{dy}}{dx}dx+\frac{d\frac{dz}{dy}}{dy}dy\right)dy.$$

Mais nous avons déjà représenté dans l'article précédent le coefficient différentiel $\frac{d\frac{dz}{dx}}{dx}$ par $\frac{d^2z}{dx^2}$: l'analogie conduit à représenter de même $\frac{d\frac{dz}{dx}}{dy}$ par $\frac{d^2z}{dxdy}$. On écrit également $\frac{d^2z}{dydx}$ au lieu de $\frac{d\frac{dz}{dy}}{dx}$, et $\frac{d^2z}{dy^2}$ au lieu de $\frac{d\frac{dz}{dy}}{dy}$. Ainsi l'expression précédente devient

$$d^2z=\left(\frac{d^2z}{dx^2}dx+\frac{d^2z}{dxdy}dy\right)dx+\left(\frac{d^2z}{dydx}dx+\frac{d^2z}{dy^2}dy\right)dy,$$

ou si l'on veut

$$d^2z=\frac{d^2z}{dx^2}dx^2+\left(\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d^2z}{dydx}\right)dxdy+\frac{d^2z}{dy^2}dy^2.$$

Dans cette expression de la différentielle seconde totale de la fonction z, le signe $\frac{d^2z}{dx^2}$ représente le coefficient différentiel du second ordre de la fonction proposée, pris en regardant x seule comme variable. Le signe $\frac{d^2y}{dxdy}$ exprime que l'on a pris le coefficient différentiel du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ en regardant x seule comme variable,

puis le coefficient différentiel de cette fonction $\frac{dz}{dx}$ en regardant y seule comme variable. Le signe $\frac{d^2z}{dydx}$ exprime que l'on a pris le coefficient différentiel du premier ordre $\frac{dz}{dy}$ en regardant y seule comme variable, puis le coefficient différentiel de cette fonction $\frac{dz}{dy}$ en regardant x seule comme variable. Enfin $\frac{d^2z}{dy^2}$ représente le coefficient différentiel du second ordre de la fonction z pris en regardant y seule comme variable.

69. Nous remarquerons maintenant que les deux coefficients différentiels $\frac{d^2z}{dxdy}$ et $\frac{d^2z}{dydx}$ sont nécessairement égaux. En effet, en revenant ici aux notions présentées dans les nos 46 et suivants, on reconnaît que $\frac{dz}{dx}$ est la limite vers laquelle tend

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

lorsque Δx tend à devenir nulle. De même $\frac{d^2z}{dxdy}$ est la limite vers laquelle tend

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x\Delta y}=\frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}-\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}}{\Delta y},$$

lorsque Δx et Δy tendent à devenir nulles. On reconnaît de même que $\frac{dz}{dy}$ est la limite vers laquelle tend

$$\frac{\Delta z}{\Delta y}=\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y},$$

lorsque Δy tend à devenir nulle; et que $\frac{d^2z}{dydx}$ est la limite vers laquelle tend

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y \Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)}{\Delta x} - \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}}{\Delta x},$$

lorsque Δx et Δy tendent à devenir nulles. Or, cette dernière quantité ne différant point de la précédente, leurs limites sont aussi égales entre elles. Donc $\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy}$. Ainsi, le coefficient différentiel du second ordre pris par rapport aux deux variables x et y est identiquement le même, soit que l'on différentie en premier lieu par rapport à x ou par rapport à y. C'est ce qu'on exprime en disant que l'ordre des différentiations n'influe pas sur les résultats.

Il en résulte que l'expression de la différentielle du second ordre de la fonction proposée z, donnée dans le numéro précédent, doit s'écrire

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy} dxdy + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2.$$

70. L'opération de la différentiation peut également être appliquée à cette expression, et pour avoir la différentielle totale du troisième ordre, il faudra différentier les fonctions $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ par rapport à x et par rapport à y. En ayant égard à la proposition démontrée dans le numéro précédent, il viendra

$$d^3z = \frac{d^3z}{dx^3} dx^3 + 3\frac{d^3z}{dx^2dy} dx^2dy + 3\frac{d^3z}{dxdy^2} dxdy^2 + \frac{d^3z}{dy^3} dy^3.$$

En continuant de la même manière, on trouvera en général

$$d^n z = \frac{d^n z}{dx^n} dx^n + n\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2} dx^{n-2}dy^2 + \ldots\ldots + \frac{d^n z}{dy^n}$$

expression dont l'analogie avec celle du développement de la puissance entière d'un binome est évidente. On pourrait écrire.

$$d^n z = \left(\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy\right)^n,$$

en se réservant de changer, après le développement, dz^n en $d^n z$.

71. Les cas où il y aurait plus de deux variables indépendantes n'exigent pas de nouvelles considérations. Soit par exemple

$$z = f(v, x, y)\ .$$

On aura pour la différentielle totale du premier ordre, d'après le n° 41,

$$dz = \frac{dz}{dv} dv + \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

En différentiant cette expression, où dv, dx, dy doivent être regardés comme des facteurs constants, et $\frac{dz}{dv}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ comme des fonctions des trois variables indépendantes v, x, y, il viendra pour la différentielle totale du second ordre

$$d^2 z = \frac{d^2 z}{dv^2} dv^2 + \frac{d^2 z}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2 z}{dy^2} dy^2 + 2\left(\frac{d^2 z}{dv dx} dv dx + \frac{d^2 z}{dv dy} dv dy + \frac{d^2 z}{dy dx} dy dx\right)$$

En général, on peut écrire

$$d^n z = \left(\frac{dz}{dv} dv + \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy\right)^n,$$

en se réservant de changer après le développement dz^n en $d^n z$.

Il en serait de même si le nombre des variables indépendantes était plus considérable.

VIII. DIFFÉRENTIELLES DES DIVERS ORDRES POUR LES FONCTIONS IMPLICITES.

72. Soit en premier lieu comme dans le n° 43, l'équation

$$f(x,y)=0,$$

dans laquelle x est la variable indépendante et y une fonction de x donnée implicitement par cette équation. La question consiste à trouver, sans résoudre l'équation, les expressions des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., de la fonction y. On a déjà vu dans le numéro cité, que l'on avait, par une différentiation, l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}=0; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Si l'on différentie une seconde fois, en se rappelant que les fonctions $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$ contiennent les deux variables x, y, et que y doit être regardée comme fonction de x, on trouvera l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{df}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

d'où l'on tire après avoir mis pour $\frac{dy}{dx}$ la valeur précédente

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{df}{dy}\right)^2-2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}+\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2}{\left(\frac{df}{dy}\right)^3}.$$

Cette expression s'obtiendrait également en différentiant la valeur de $\frac{dy}{dx}$.

On continuera de la même manière pour former les coefficients différentiels des ordres supérieurs au second.

73. Les mêmes notions conviennent aux cas où il y aurait un plus grand nombre de variables et d'équations proposées. Tout se réduit à appliquer le procédé de la différentiation, afin de former des équations différentielles d'un ordre de plus en plus élevé, et dont on pourra toujours déduire les expressions des coefficients différentiels des fonctions qui ne sont données que d'une manière implicite. Nous considérerons le cas le plus simple après le précédent. Soient les deux équations

$$f(x,y,z)=0$$
$$F(x,y,z)=0,$$

dans lesquelles x est la variable indépendante, y et z deux fonctions de cette variable déterminées par ces équations. En les différentiant une première fois, il viendra

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$
$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

équations du premier ordre, d'où l'on déduira par l'élimination

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}\frac{dF}{dz} - \frac{dF}{dx}\frac{df}{dz}}{\frac{df}{dy}\frac{dF}{dz} - \frac{dF}{dy}\frac{df}{dz}}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{df}{dx}\frac{dF}{dy}}{\frac{df}{dy}\frac{dF}{dz} - \frac{dF}{dy}\frac{df}{dz}}.$$

En différentiant les équations précédentes, on trouvera ensuite

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + 2\frac{d^2 f}{dxdy}\frac{dy}{dx} + 2\frac{d^2 f}{dxdz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2 f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2 f}{dydz}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2 f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{df}{dz}\frac{d^2 z}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + 2\frac{d^2 F}{dxdy}\frac{dy}{dx} + 2\frac{d^2 F}{dxdz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2 F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2 F}{dydz}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2 F}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dF}{dy}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dF}{dz}\frac{d^2 z}{dx^2} = 0,$$

équations du second ordre, dont on tirera les expressions de $\frac{d^2 y}{dx^2}$ et $\frac{d^2 z}{dx^2}$, après avoir substitué pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ les valeurs précédentes.

Ces mêmes expressions de $\frac{d^2 y}{dx^2}$ et $\frac{d^2 z}{dx^2}$ peuvent également être obtenues en différentiant immédiatement les valeurs précédentes de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$.

En continuant de la même manière, on obtiendrait les coefficients différentiels des ordres supérieurs des fonctions y et z.

IX. CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE.

74. Nous avons indiqué dans le n° 2 la nécessité de distinguer dans chaque question les variables indépendantes, c'est-à-dire dont les valeurs sont arbitraires, et les variables fonctions de celles-ci. Ces notions ont été reproduites dans le n° 43. Les opérations analytiques qui constituent le calcul différentiel sont essentiellement fondées sur la distinction dont il s'agit, qui doit être maintenue dans toute l'étendue de ces équations, puisque les différentiations successives s'opèrent toujours en regardant comme des facteurs constants les différentielles des variables indépendantes, tandis que l'on fait varier les différentielles des autres variables. On peut toutefois, en employant certaines transformations, substituer dans le cours d'un calcul de nouvelles variables indépendantes à celles que l'on avait d'abord choisies.

Pour se former une idée juste des transformations dont il s'agit, on se représentera que la résolution d'une question aurait conduit à une équation telle que

$$F\left(x y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \text{etc.}\right) = 0,$$

dans laquelle x serait regardée comme la variable indépendante, et y comme fonction de x. Cette équation établit une relation entre x, y, et les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., qui expriment respectivement les limites des rapports subsistants entre les variations simultanées de x et des fonctions y, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc. On admet maintenant que x doit cesser d'être prise pour

variable indépendante, et que l'on en prendra une autre désignée par t. Il est entendu par-là que x et y deviendront des fonctions de t; et néanmoins la dépendance établie primitivement entre ces deux variables x et y ne doit pas cesser de subsister. La relation qui liera t aux variables x et y, doit être donnée, soit par une équation entre t et x, telle que $\phi(t, x) = o$, soit par une équation entre t et y, telle que $\psi(t, y) = o$, soit enfin par une équation entre les trois variables, telle que $\Pi(t, x, y) = o$.

Cela posé, il est visible que les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., qui entrent dans l'équation $F = o$ doivent être remplacés par d'autres coefficients différentiels de la fonction y pris par rapport à t. Il s'agit d'opérer ce changement en conservant la dépendance de y à x. On y parviendra en remarquant simplement que quand x est fonction de t, et y fonction de x, on a, d'après la règle du n° 24,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

expression qui doit être mise à la place de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation $F = 0$.

Cette première expression donne immédiatement celle des coefficients différentiels des ordres supérieurs. Car en différentiant les deux membres de l'équation

précédente par rapport à t, et par conséquent regardant dt comme constante, il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

On déduira de même de cette expression, en différentiant par rapport à t et divisant par $\frac{dx}{dt}$,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2-\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5},$$

et ainsi de suite.

75. Lorsque ces valeurs auront été substituées dans l'équation $F=0$, cette équation contiendra x, y, et leurs coefficients différentiels pris par rapport à t. Si l'on a donné une équation $\Phi(t,x)=0$, entre t et x, on pourra remplacer, dans l'équation $F=0$, x et ses coefficients différentiels par leurs valeurs déduites de l'équation $\Phi(t,x)=0$, conformément à ce qu'on a vu n° 72. Alors x aura disparu, et l'équation $F=0$ ne contiendra que $t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}$, etc. Si l'on a donné une équation $\Psi(t,y)=0$ entre t et y, on pourra de même faire disparaître y et les coefficients différentiels de y, en sorte que l'é-

quation $F=0$ ne contiendra que t, x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^3x}{dt^3}$, etc. Enfin si l'on a donné une équation $\Pi(t,x,y)=0$ entre les trois variables, on pourra faire disparaître à volonté x ou y, puisque cette équation et ses différentielles successives prises par rapport à t (en regardant x et y comme fonctions de t), donneront les valeurs de x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., en fonction de y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., et réciproquement.

76. Si la relation établie entre t et les autres variables consistait dans l'équation $x=t$, on aurait $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^3x}{dt^3}=0$, etc., et les formules du n° 74 se réduiraient, comme cela doit être, à $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y}{dt^3}$, etc.

Si la relation dont il s'agit consistait dans l'équation $y=t$, on aurait $\frac{dy}{dt}=1$, $\frac{d^2y}{dt^2}=0$, $\frac{d^3y}{dt^3}=0$, etc., et ces mêmes formules deviendraient (en écrivant y au lieu de t),

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},$$

Etc.

On doit donc remplacer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{d^2x}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., par ces dernières expressions, lorsque, dans une équation entre x et y, ayant d'abord pris x pour la variable indépendante, on veut ensuite que y devienne la variable indépendante.

77. Les formules précédentes conduisent immédiatement à l'expression de la différentielle des fonctions inverses (*voyez* n° 35).

L'équation

$$y = lx \qquad \text{donne} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

x étant regardée comme la variable indépendante. Si l'on veut maintenant que y soit la variable indépendante, on remplacera $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, ce qui donnera

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dx}{dy} = x;$$

c'est-à-dire, en mettant pour x sa valeur en y, qui est e^y,

$$\frac{d.e^y}{dy} = e^y.$$

L'équation

$$y = \sin.x \qquad \text{donne} \qquad \frac{dy}{dx} = \cos.x,$$

x étant regardée comme la variable indépendante. Si la variable indépendante doit être y, on écrira

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos.\ x, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos.\ x};$$

c'est-à-dire, en mettant pour x sa valeur arc sin. y,

$$\frac{d.\text{arc sin}.y}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}};$$

L'équation

$$y=\text{tang}.\,x \qquad \text{donne} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos.^2 x}.$$

Donc

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos.^2 x},\qquad \frac{dx}{dy}=\cos.^2 x,\qquad \text{ou}\ \frac{d.\text{arc tang}.y}{dy}=\frac{1}{1+y^2}.$$

78. Les mêmes considérations s'appliquent aux cas où le nombre des variables est plus considérable. Si l'on avait, par exemple, l'équation

$$F\left(v,x,y,\frac{dy}{dv},\frac{dy}{dx},\text{etc.},z,\frac{dz}{dv},\frac{dz}{dx},\text{etc.}\right)=0,$$

dans laquelle v et x désignent les deux variables indépendantes, y et z deux fonctions de ces variables; et qu'on voulût ensuite prendre pour variables indépendantes s et t, on remarquerait que v et x devenant fonctions de s et t, tandis que y et z ne cessent point d'être fonctions de v et x, on a

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dv}\frac{dv}{ds}+\frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds},\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt}+\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt};$$

d'où l'on déduit par l'élimination

$$\frac{dy}{dv}=\frac{\frac{dy}{dt}\frac{dx}{ds}-\frac{dy}{ds}\frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{ds}\frac{dv}{dt}-\frac{dx}{dt}\frac{dv}{ds}},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{ds}\frac{dv}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{dv}{ds}}{\frac{dx}{ds}\frac{dv}{dt}-\frac{dx}{dt}\frac{dv}{ds}},$$

On obtiendrait des expressions semblables pour $\frac{dz}{dv}$ et $\frac{dz}{dx}$.
Si l'on différentie les deux expressions précédentes de $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dy}{dt}$ par rapport à s et t, on aura trois équations d'où l'on pourra tirer les expressions des trois coefficients différentiels du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dxdv}$, $\frac{d^2y}{dv^2}$, et ainsi des autres coefficients différentiels. Il serait superflu de continuer plus loin la recherche de ces formules générales, parce qu'il convient mieux d'opérer dans les applications sur les expressions analytiques qui se présentent.

79. Le changement des variables indépendantes a principalement lieu dans la géométrie, lorsqu'on veut passer d'un système de coordonnées à un autre. Admettons, par exemple, que dans l'équation

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \text{etc.}\right)=0,$$

x et y représentent deux coordonnées $0p$, mp (fig. 23) comptées sur deux axes rectangulaires, et qu'on veuille remplacer x par l'angle ω formé par le rayon vecteur $0m$ avec l'axe des x. On aura donc

$$\text{tang.}\ \omega = \frac{y}{x}.$$

Cette équation, étant différentiée plusieurs fois de suite par rapport à ω, dont y et x sont fonctions, donnera des équations dont on tirera les valeurs de $\frac{dx}{d\omega}$, $\frac{d^2x}{d\omega^2}$, etc., qui devront être substituées dans les formules du n° 74. Les valeurs des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., représentées par ces formules

étant substituées dans l'équation $F=0$, cette équation sera entre ω, y, $\frac{dy}{d\omega}$, $\frac{d^2y}{d\omega^2}$, etc.

Si l'on veut changer entièrement le système des coordonnées, en introduisant à la place de y la longueur du rayon vecteur $0m$, que nous désignerons par ρ, on poserait après l'équation précédente

$$y=\rho \sin. \omega,$$

et différentiant cette équation plusieurs fois de suite par rapport à ω, ρ étant regardée comme variable, on obtiendrait des équations dont on tirerait les valeurs de $\frac{dy}{d\omega}$, $\frac{d^2y}{d\omega^2}$, etc., qui devraient être substituées dans l'équation proposée, qui sera alors entre ω, ρ, $\frac{d\rho}{d\omega}$, $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, etc.

Mais dans ce dernier cas il eût été plus simple de poser immédiatement

$$x=\rho \cos. \omega, \qquad y=\rho \sin. \omega,$$

et de déduire de ces dernières équations les valeurs de $\frac{dx}{d\omega}$, $\frac{d^2x}{d\omega^2}$, etc., et $\frac{dy}{d\omega}$, $\frac{d^2y}{d\omega^2}$, etc. Ces valeurs étant substituées dans les formules du n° 74, on obtiendrait ainsi les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., en ω, ρ, $\frac{d\rho}{d\omega}$, $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, etc., qui devraient être substituées dans l'équation proposée.

X. EXPRESSION GÉNÉRALE DU DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION SUIVANT LES PUISSANCES ENTIÈRES DE LA VARIABLE. THÉORÈME DE TAYLOR.

80. La considération des coefficients différentiels ou des fonctions dérivées des divers ordres, donne les moyens de développer une fonction quelconque en une série infinie ordonnée par rapport aux puissances entières de la variable. Soit la fonction proposée

$$y=f(x).$$

En revenant aux notions présentées dans l'article VI, et continuant le tableau du n° 50, on en déduira par de simples substitutions, pour les valeurs correspondantes de x et y,

x	$y=y$
$x+\Delta x$	$y_1=y+\Delta y$
$x+2\Delta x$	$y_2=y+2\Delta y+\Delta^2 y$
$x+3\Delta x$	$y_3=y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . . : . . . .
$x+n\Delta x$	$y_n=y+n\Delta y+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 y+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\Delta^3 y+\ldots+\Delta^n y.$

L'expression de y_n est indépendante de la nature de la fonction : elle peut toujours être formée tant que cette fonction ne prend point des valeurs infinies dans l'intervalle des valeurs x et $x+n\Delta x$ de la variable. Ainsi nous pouvons écrire

$$y_n=y+n\Delta y+\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2}\Delta^2 y+\frac{n^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{2.3}\Delta^3 y+\ldots\ldots+\Delta^n y,$$

ou bien encore

$$=y+n\Delta x.\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{(n\Delta x)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}+\frac{(n\Delta x)^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{2.3}\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}+\ldots+\Delta^n y.$$

Cette équation subsiste, quelle que soit la grandeur attribuée à l'intervalle constant Δx, et quel que soit le nombre n. Admettons que l'intervalle $n\Delta x$ (qui sépare les valeurs de x auxquelles répondent les valeurs y et y_n de la fonction) demeurant constant, on fasse diminuer indéfiniment Δx, et augmenter indéfiniment le nombre n dans la même proportion. L'équation précédente ne cessera pas de subsister, et par conséquent elle doit subsister également lorsqu'on remplacera chaque terme par la limite vers laquelle il tend lorsque Δx tend à devenir nulle. Or, il est visible que la limite commune des fractions $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{1}{2n}$, etc., est l'unité, et que les limites des rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, etc., sont les coefficients différentiels ou fonctions dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. Donc en faisant pour abréger $n\Delta x=h$, on voit que l'équation

$$f(x)=y$$

entraîne la suivante

$$f(x+h)=y+h\frac{dy}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{h^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{h^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4}, + \text{etc}$$

que l'on écrit souvent d'après Lagrange

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\frac{h^4}{2.3.4}f^{\text{iv}}(x)+\text{etc.}$$

en employant pour les coefficients différentiels ou fonc-

tions dérivées la notation proposée par ce grand géomètre. Cette expression remarquable, appelée *théorème* ou *formule de Taylor*, du nom de son auteur, doit être regardée comme l'élément principal du calcul différentiel et de ses applications.

81. L'expression précédente est souvent présentée sous une autre forme. En faisant $x=0$, et désignant par $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \frac{d^3y_0}{dx^3}$, etc., les valeurs particulières et constantes que prennent alors les fonctions $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., il viendra

$$f(h)=y_0+h\frac{dy_0}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2y_0}{dx^2}+\frac{h^3}{2.3}\frac{d^3y_0}{dx^3}+\frac{h^4}{2.3.4}\frac{d^4y_0}{dx^4}+\text{etc.}$$

ou en mettant x au lieu de h,

$$f(x)=y_0+x\frac{dy_0}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y_0}{dx^2}+\frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y_0}{dx^3}+\frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^4y_0}{dx^4}+\text{etc.}$$

Cette dernière formule a été donnée par Stirling; mais elle est plus connue sous le nom de série de Maclaurin, à qui on l'a généralement attribuée. Quand on emploie la notation de Lagrange, on écrit

$$f(x)=f(o)+xf'(o)+\frac{x^2}{2}f''(o)+\frac{x^3}{2.3}f'''(o)+\frac{x^4}{2.3.4}f^{\text{iv}}(o)+\text{etc.}$$

Cette formule et celle du n° 80 servent à développer une fonction suivant les puissances entières de la variable x ou h. En général, la série se prolonge à l'infini. Les fonctions algébriques entières composées de termes de la forme ax^m, m étant un

nombre entier positif, produisent seules des suites finies, les coefficients différentiels de ax^m, d'un ordre supérieur à m, étant nuls comme on l'a remarqué n° 56. Il est d'ailleurs évident que si les développements de $f(x+h)$ et de $f(x)$ ne renferment qu'un nombre limité de termes, ils se réduisent alors à des polynomes entiers. Si, par exemple, les dérivées $f^{n+1}(0)$, $f^{n+2}(0)$, etc., sont toutes nulles, il reste simplement

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\ldots\ldots+\frac{x^n}{2.3\ldots n}f^n(0),$$

en sorte que $f(x)$ est, dans cette hypothèse, une fonction algébrique entière du degré n.

82. L'équation

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\text{etc.}$$

est bien facile à établir par la méthode des coefficients indéterminés, lorsque l'on sait *à priori* que la fonction $f(x)$ est développable en une série de la forme $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$etc. Posons en effet

$$(1)\qquad f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour déterminer les constantes inconnues A,B,C,D,.... on prendra les dérivées successives de l'équation (1), ce qui donnera

$$f'(x)=B+2Cx+3Dx^2+\ldots\ldots$$
$$f''(x)=2C+2.3Dx+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et en faisant ensuite $x=0$, on aura

$$A=f(0),\quad B=f'(0),\quad C=\frac{f''(0)}{2},\ \text{etc.},$$

d'où résulte l'équation (1) qu'il fallait démontrer.

On arrivera de la même manière à la série de Taylor, en posant

(2) $$f(x+h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3+\ldots\ldots$$

et en différentiant plusieurs fois de suite par rapport à h, ce qui donne

(3) $$\frac{df(x+h)}{dh}=B+2Ch+3Dh^2+\ldots\ldots$$

(4) $$\frac{d^2f(x+h)}{dh^2}=2C+2.3Dh+\ldots\ldots$$

. . . .

Faisons $x+h=u$, d'où $f(x+h)=f(u)$: par le principe des fonctions de fonctions, il vient

$$\frac{df(x+h)}{dh}=f'(u)\frac{du}{dh}=f'(u):$$

on trouve semblablement,

$$\frac{d^2f(x+h)}{dh^2}=f''(u),$$

et ainsi de suite, de sorte que, pour $h=0$, les dérivées successives

$$\frac{df(x+h)}{dh},\quad \frac{d^2f(x+h)}{dh^2},\ldots$$

sont respectivement égales à

$$f'(x),\quad f''(x),\ \text{etc.}$$

En posant donc $h=0$ dans les équations (2), (3), (4),.... on obtiendra

$$A=f(x),\ B=f'(x),\ C=\frac{f''(x)}{2},\ \text{etc. C. Q. F. D.}$$

On remarquera en passant que les deux dérivées

$$\frac{df(x+h)}{dx}, \quad \frac{df(x+h)}{dh}$$

ont pour expression commune $f'(u)$, et sont par suite *égales* entre elles ; et qu'il en est de même des dérivées des ordres supérieurs

$$\frac{d^2 f(x+h)}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f(x+h)}{dh^2},$$

$$\frac{d^3 f(x+h)}{dx^3}, \quad \frac{d^3 f(x+h)}{dh^3},$$

. . . .

83. Rien ne limitant dans la formule du n° 81 la valeur de x, ni la valeur de h dans la formule du n° 80, la fonction y se trouve exprimée dans toute son étendue, ce qui est très-remarquable, au moyen de la valeur de cette fonction et des valeurs de la série infinie de ses coefficients différentiels qui répondent à une seule valeur de x. Ainsi donner les valeurs de la fonction et des coefficients différentiels pour une seule valeur de la variable, équivaut en général à donner la fonction elle-même. Mais il importe d'observer que chacune de ces séries ne peut être égale à la fonction correspondante $f(x)$ ou $f(x+h)$, qu'autant qu'elle est *convergente*, c'est-à-dire, qu'autant que les valeurs obtenues, en prenant un nombre de termes de plus en plus grand, s'approchent de plus en plus d'une certaine limite; ou, ce qui est la même chose, qu'autant que l'on peut assigner deux limites aussi resserrées qu'on le veut, entre lesquelles la valeur obtenue se trouvera toujours comprise,

quelque grand que soit le nombre des termes que l'on ajoute. Dans quelques cas, la convergence d'une série est manifeste; par exemple, lorsque les termes diminuent progressivement à partir du premier, et sont alternativement positifs et négatifs, les résultats donnent évidemment des nombres qui diffèrent de moins en moins, et convergent vers un nombre intermédiaire. Lorsque les termes sont de même signe, la série est convergente si tous sont moindres que les termes correspondants d'une progression géométrique dont la raison est plus petite que l'unité. Au contraire elle est divergente, si tous les termes sont plus grands que ceux d'une progression géométrique dont la raison est l'unité, ou plus grande que l'unité. En général, un examen spécial est nécessaire pour s'assurer si une série est ou non convergente.

84. Il est très-important, soit pour l'application de la série de Taylor au calcul numérique des valeurs des fonctions, soit en général toutes les fois que l'on se borne à considérer un nombre déterminé de termes de cette série (comme on le fait dans les applications du calcul différentiel à la géométrie, à la mécanique et à la théorie du mouvement de la chaleur), de pouvoir apprécier l'erreur que l'on commet, ou du moins de pouvoir assigner deux limites entre lesquelles cette erreur soit comprise.

On parvient, au moyen d'une remarque très-simple, à déterminer les limites dont il s'agit. Soit une fonction quelconque $f(h)$ dont la valeur soit nulle quand la variable $h=0$: on peut affirmer que si depuis $h=0$

jusqu'à $h=h$, le coefficient différentiel $\frac{d.f(h)}{dh}$ est constamment positif ou constamment négatif, et ne devient pas infini, la valeur de $f(h)$ sera positive ou négative, c'est-à-dire du même signe que le coefficient différentiel. En effet, tant que $\frac{d.f(h)}{dh}$ est positif et fini, la fonction croît positivement, et lorsqu'il est négatif et fini, cette même fonction croît négativement. Mais cette proposition ne subsisterait plus dans les cas où le coefficient différentiel, ou la fonction même, auraient des valeurs infinies dans l'intervalle de 0 à h.

Cela posé, supposons que l'on veuille développer la fonction $f(x+h)$ suivant les puissances de h, et que l'on ne prenne d'abord que le premier terme $f(x)$ du développement. Nous écrirons donc

$$f(x+h)=f(x)+h.\Pi,$$

Π étant une quantité inconnue, qui, lorsque h tend à devenir nulle, tend à devenir égale à $\frac{d.f(x)}{dx}$. La question consiste à déterminer deux limites P, Q entre lesquelles la quantité Π se trouve comprise, et qui soient telles que l'on ait, quelle que soit h,

$$f(x+h)>f(x)+h\mathrm{P}$$
$$f(x+h)<f(x)+h\mathrm{Q};$$

ou bien

$$f(x+h)-f(x)-h\mathrm{P}>0$$
$$f(x+h)-f(x)-h\mathrm{Q}<0;$$

mais d'après le n° précédent, la première de ces fonctions (dont la valeur est nulle lorsque $h=0$) sera posi-

tive, et la seconde sera négative, si leurs coefficients différentiels pris par rapport à h sont eux-mêmes positifs ou négatifs, et ne deviennent point infinis, depuis $h=0$ jusqu'à $h=h$; c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{d.f(x+h)}{dh}-P>0,$$

$$\frac{d.f(x+h)}{dh}-Q<0,$$

depuis $h=0$ jusqu'à $h=h$. Or il est clair que l'on satisfera à cette condition, 1° en prenant pour P la plus petite de toutes les valeurs que prend la fonction $\frac{d.f(x+h)}{dh}$ depuis $h=0$ jusqu'à $h=h$; 2° en prenant pour Q la plus grande des valeurs que prend la même fonction dans le même intervalle.

Admettons maintenant que l'on prenne les deux premiers termes $f(x)+h\frac{d.f(x)}{dx}$ du développement. On déterminera les limites du reste de la série en assignant les valeurs de P et Q, de manière que l'on ait, quelle que soit h,

$$f(x+h)>f(x)+h\frac{d.fx}{dx}+\frac{h^2}{2}P$$

$$f(x+h)<f(x)+h\frac{d.fx}{dx}+\frac{h^2}{2}Q;$$

ou bien

$$f(x+h)-f(x)-h\frac{d.f(x)}{dx}-\frac{h^2}{2}P>0$$

$$f(x+h)-f(x)-h\frac{d.f(x)}{dx}-\frac{h^2}{2}Q<0.$$

D'après le n° précédent, ces dernières conditions seront satisfaites si le coefficient différentiel de la première fonction est positif dans l'intervalle de 0 à h, et si le coefficient différentiel de la seconde est négatif dans ce même intervalle, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - \frac{d.f(x)}{dx} - hP > 0$$

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - \frac{d.f(x)}{dx} - hQ < 0.$$

Mais ces conditions seront elles-mêmes satisfaites si, différentiant de nouveau par rapport à h, on pose

$$\frac{d^2f(x+h)}{dh^2} - P > 0$$

$$\frac{d^2f(x+h)}{dh^2} - Q < 0.$$

Donc on doit prendre ici respectivement pour P et Q la plus petite et la plus grande des valeurs qui peuvent appartenir au coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2f(x+h)}{dh^2}$, dans l'intervalle de 0 à h.

Supposons encore que prenant les trois premiers termes $f(x)+h\frac{d.f(x)}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2}$ du développement, on veuille assigner les limites du reste. Il s'agira donc de déterminer P et Q de manière que l'on ait

$$f(x+h)-f(x)-h\frac{d.f(x)}{dx}-\frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2}-\frac{h^3}{2.3}P > 0$$

$$f(x+h)-f(x)-h\frac{d.f(x)}{dx}-\frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2}-\frac{h^3}{2.3}Q < 0.$$

Or ces conditions seront satisfaites si l'on a

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - \frac{d.f(x)}{dx} - h\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{h^2}{2}.P > 0$$

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - \frac{d.f(x)}{dx} - h\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{h^2}{2}Q < 0.$$

Ces dernières le seront elles-mêmes si l'on a

$$\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} - \frac{d^2.f(x)}{dx^2} - hP > 0$$

$$\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} - \frac{d^2.f(x)}{dx^2} - hQ < 0.$$

Enfin celles-ci le seront si l'on a

$$\frac{d^3.f(x+h)}{dh^3} - P > 0$$

$$\frac{d^3.f(x+h)}{dh^3} - Q < 0;$$

c'est-à-dire si l'on prend pour P la plus petite, et pour Q la plus grande des valeurs qu'affectera la fonction $\frac{d^3.f(x+h)}{dh^3}$ dans l'intervalle de 0 à h.

En continuant de la même manière, on voit que tant que les coefficients différentiels ne deviennent point infinis, on peut développer une fonction par la série de Taylor, et s'arrêter à un terme quelconque, en fixant les limites de la valeur de la partie de la série que l'on néglige. Nous remarquerons d'ailleurs que les coefficients différentiels $\frac{d.f(x+h)}{dh^2}$, $\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2}$, etc., ne diffèrent point de $\frac{d.f(x+h)}{dx}$, $\frac{d^2.f(x+h)}{dx^2}$, etc., ou de $\frac{d.f(x)}{dx}$, $\frac{d^2.f(x)}{dx^2}$, etc.

On est donc assuré que la valeur de la série est toujours comprise entre celle des deux expressions suivantes,

$$f(x)+h\frac{d.f(x)}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2}+\frac{h^3}{2.3}\frac{d^3.f(x)}{dx^3}+\ldots\ldots+\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}P$$

$$f(x)+h\frac{d.f(x)}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2}+\frac{h^3}{2.3}\frac{d^3.f(x)}{dx^3}+\ldots\ldots+\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}Q.$$

P et Q désignant respectivement la plus petite et la plus grande valeur que puisse prendre le coefficient différentiel $\frac{d^\mu.f(x)}{dx^\mu}$ pour toutes les valeurs de la variable comprises entre x et $x+h$.

85. Il est visible, d'après ce qui précède, que l'on aura toujours la valeur exacte de la série en prenant pour dernier terme $\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}$ multiplié par un certain facteur compris entre P et Q; c'est-à-dire, par une des valeurs de la fonction $\frac{d^\mu.f(x)}{dx}$ qui ont lieu dans l'intervalle de x à $x+h$. C'est ce qu'on exprime en écrivant

$$f(x+h)=f(x)+h\frac{d.f(x)}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2}+\frac{h^3}{2.3}\frac{d^3.f(x)}{dx^3}+\ldots+\frac{h^\mu}{2.3.4..\mu}\frac{d^\mu.f(x+\theta h)}{dx^\mu}:$$

θ est ici un nombre inconnu compris entre 0 et l'unité.

Quelques géomètres écrivent encore le dernier terme de cette manière,

$$\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}\frac{d^\mu.f(x\ldots\ldots x+h)}{dx^\mu},$$

afin d'indiquer que l'on doit mettre pour x dans ce terme, sous le signe de la fonction, une des valeurs de la

variable comprises entre x et $x+h$. Cette valeur est inconnue; mais on sait que l'on a une limite supérieure des valeurs de $f(x+h)$ en mettant celle qui rend $\frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}$ le plus grand possible, et une limite inférieure de $f(x+h)$ en mettant celle qui rend $\frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}$ le moindre possible. Il est évident d'ailleurs que si la fonction $\frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}$ est constamment croissante ou constamment décroissante depuis $x=x$ jusqu'à $x=x+h$, les limites dont il s'agit seront données par les valeurs $\frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}$ qui répondent à $x=x$ et à $x=x+h$.

86. On peut, comme dans le n_o 81, faire $x=0$ dans la formule précédente, puis écrire x au lieu de h, ce qui donnera

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{2.3}f'''(0)+\ldots\ldots+\frac{x^\mu}{2.3.4\ldots.\mu}f^\mu(\theta x),$$

θ désignant toujours un nombre dont la valeur n'est pas déterminée, mais se trouve comprise entre 0 et l'unité. On obtiendra deux limites entre lesquelles la valeur de $f(x)$ sera nécessairement comprise, en mettant dans le dernier terme, pour $f^\mu(\theta x)$, la plus petite et la plus grande valeur que prenne ce coefficient différentiel dans l'intervalle de 0 à x.

87. Au moyen de l'expression du reste de la série de Taylor, qui a été donnée par Lagrange, toute incer-

titude relative à la convergence de cette série disparaît entièrement. En effet, la série est nécessairement convergente, et a pour somme $f(x+h)$, si la valeur du terme complémentaire $\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}\,\frac{d^\mu.f(x+\theta h)}{dx^\mu}$ devient plus petite que toute grandeur donnée lorsque le nombre μ augmente indéfiniment. On peut remarquer d'ailleurs que cette circonstance aura lieu toutes les fois que l'on pourra assigner un nombre déterminé N au-dessous duquel la valeur absolue du facteur $\frac{d^\mu.f(x+\theta h)}{dx^\mu}$ reste constamment quelque grand que soit μ, car le facteur $\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}$ tend nécessairement à devenir nul lorsque μ augmente de plus en plus.

Des cas où, pour certaines valeurs particulières de la variable, la série de Taylor ne donne point le développement de la fonction.

88. L'existence de la série de Taylor suppose que la fonction $y=f(x)$, et ses coefficients différentiels $f'(x)$, $f''(x)$, etc. ne deviennent pas infinis pour la valeur de x à partir de laquelle l'accroissement désigné par h est compté. Si le contraire a lieu, la série sera en défaut. Soit par exemple la fonction $f(x)$ de la forme $\frac{F(x)}{(x-a)^m}$, m désignant un nombre positif, et $F(x)$ une fonction de x qui ne devient pas nulle ni infinie lorsque $x=a$. Si, conformément aux règles précédentes, on développe $\frac{F(x+h)}{(x+h-a)^m}$ en une série or-

donnée suivant les puissances entières de h, tous les termes deviendront infinis lorsqu'on y fera $x=a$. Cependant la fonction a alors une valeur déterminée qui est $\frac{F(a+h)}{h^m}$. Mais comme le développement de cette valeur suivant les puissances de h doit nécessairement présenter des puissances négatives de cette quantité, il ne peut plus être donné par la série de Taylor.

89. Soit encore la fonction log. x. Tous les termes du développement de log. $(x+h)$ deviennent infinis lorsqu'on y fait $x=0$. Cependant la fonction présente alors une valeur déterminée, qui est log. h; mais cette valeur ne peut être représentée par une série ordonnée suivant les puissances entières de h, puisque log. $h=-\frac{1}{0}$ lorsque $h=0$.

90. La série de Taylor donne naturellement des résultats indéterminés, lorsque la fonction proposée $f(x)$ contenant des radicaux, la valeur particulière attribuée à x fait disparaître ces radicaux dans la fonction et dans ses coefficients différentiels. Pour en concevoir la raison, il faut remarquer qu'un radical de la forme de $\sqrt[q]{(x-a)^p}$, p et q désignant des nombres entiers, qui fait partie de la fonction $f(x)$, donne à cette fonction autant de valeurs différentes réelles ou imaginaires qu'il se trouve d'unités dans le nombre q. Comme ce même radical se reproduit dans les coefficients différentiels de la fonction, ces coefficients présentent eux-mêmes, comme cela doit être, un nombre de q de valeurs. Ainsi il y a, à proprement parler, autant de développements particuliers et différents les uns des autres que le radical dont il s'agit

présente de valeurs. Mais si l'on donne à x la valeur particulière a, le radical disparaît de tous les termes de la série, tandis qu'il subsiste toujours dans la fonction, où il est devenu $\sqrt[q]{h^p}$. Donc la série ne peut plus alors représenter la fonction, puisque celle-ci a plusieurs valeurs tandis que la série n'en aurait qu'une L'analyse résout cette contradiction en donnant des valeurs infinies aux termes de la série, qui ne présente plus alors de résultat déterminé.

Le développement de $f(x)$ doit, dans le cas dont nous nous occupons, contenir des termes affectés de $h^{\frac{p}{q}}$. On connaîtra ce développement en faisant dans la fonction proposée $x=a+h$, et développant $f(a+h)$. Les puissances fractionnaires de h paraîtront dans ce dernier développement.

91. Soit, par exemple

$$f(x)=2ax-x^2+a\sqrt{x^2-a^2},$$

qui donne

$$\frac{d.f(x)}{dx}=2(a-x)+\frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$\frac{d^2.f(x)}{dx^2}=-2+\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{ax^2}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

etc.

En faisant $x=a$, on a $f(x)=a^2$, et les coefficients différentiels de tous les ordres sont infinis. Cette circonstance indique que le développement de $f(x+h)$ doit ici contenir des puissances fractionnaires de h lorsque $x=a$. La fonction devient alors en effet

$$f(a+h)=a^2-h^2+a\sqrt{h}\sqrt{2a+h},$$

dont le développement suivant les puissances de h contiendra les termes $h^{\frac{1}{2}}$, $h^{\frac{3}{2}}$, $h^{\frac{5}{2}}$, etc.

92. On doit remarquer d'ailleurs qu'un radical contenu dans la fonction $f(x)$ peut disparaître de deux manières différentes lorsqu'on attribue une valeur particulière à la variable x, savoir : 1° parce que la quantité contenue sous le radical deviendrait nulle ; 2° parce qu'un facteur dont ce radical serait affecté deviendrait nul. Dans le premier cas le développement déduit de la série de Taylor ne peut jamais convenir à la fonction $f(x+h)$ pour la valeur particulière de x dont il s'agit, par la raison indiquée n° 90. Mais il n'en est pas de même dans le second cas, parce que le facteur dont le radical est affecté, et qui devient nul dans la fonction, peut cesser d'affecter ce radical dans les coefficients différentiels des ordres supérieurs, en sorte qu'il n'y disparaîtrait pas, et que la série présenterait en conséquence le nombre de valeurs nécessaire. Cette série convient donc aux cas dont il s'agit, et donne une valeur déterminée.

93. Si par exemple la fonction proposée était

$$f(x) = (x-a)^m \sqrt{x-b};$$

m étant un nombre entier positif, on trouverait

$$\frac{d.f(x)}{dx} = m(x-a)^{m-1}\sqrt{x-b} + \frac{(x-a)^m}{2\sqrt{x-b}},$$

$$\frac{d^2.f(x)}{dx^2} = m(m-1)(x-a)^{m-2}\sqrt{x-b} + \frac{m(x-a)^{m-1}}{\sqrt{x-b}} - \frac{(x-a)^m}{4(x-b)^{\frac{3}{2}}},$$

etc.

Chaque différentiation fait disparaître dans le premier terme un des facteurs de $(x-a)^m$. Après un nombre m de différentiations ces facteurs auront entièrement disparu, et par conséquent la supposition $x=a$, en rendant nuls tous les coefficients différentiels des m premiers ordres, laissera subsister le radical $\sqrt{x-b}$ dans tous les autres.

Valeurs des quantités qui se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

94. Les notions précédentes s'appliquent directement à la recherche de la valeur des fractions, telles que

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

qui, pour une certaine valeur $x=a$ de la variable, se réduisent à l'expression indéterminée $\frac{0}{0}$.

La valeur $x=a$ étant supposée réduire à zéro les deux termes $f(x)$ et $F(x)$, demander la valeur de la fraction dans ce cas, c'est évidemment demander la limite dont s'approche indéfiniment le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ lorsque x tend à devenir égale à a. Or, tant que la variable x demeure indéterminée, on peut toujours, en développant les deux fonctions par le théorème de Taylor, poser l'équation

$$\frac{f(x+h)}{F(x+h)}=\frac{f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\text{etc.}}{F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{2}F''(x)+\frac{h^3}{2.3}F'''(x)+\text{etc.}},$$

Supposons d'abord que les deux développements ne tombent point, lorsqu'on donne à x la valeur particulière a, dans les cas d'exception considérés dans les n°s 88 et suivants. On aura évidemment la valeur demandée en faisant d'abord $x=a$, puis en examinant vers quelle limite tend le second membre lorsque h tend à devenir égale à zéro. Or, puisque $f(a)$ et $F(a)$ sont nulles par hypothèse, cette limite est évidemment

$$\frac{f'(a)}{F'(a)},$$

c'est-à-dire le quotient des coefficients différentiels ou des fonctions dérivées du premier ordre des fonctions $f(x)$ et $F(x)$, dans lesquelles on a fait $x=a$.

Si la valeur $x=a$ faisait aussi évanouir ces deux coefficients différentiels du premier ordre, on trouverait alors de la même manière

$$\frac{f''(a)}{F''(a)},$$

pour la valeur demandée. Et ainsi de suite en prenant toujours pour la valeur de la fraction proposée le quotient des deux premiers coefficients différentiels que la valeur $x=a$ ne rend pas nuls en même temps.

Mais si le premier coefficient différentiel, qui ne s'évanouit pas au numérateur, n'était pas du même ordre que le premier coefficient différentiel qui ne s'évanouit pas au dénominateur, il est visible que la valeur demandée serait 0 ou $\frac{1}{0}$, c'est-à-dire nulle ou infiniment grande, suivant que le nombre des termes qui dispa-

raissent au numérateur est plus grand ou moindre que le nombre des termes qui disparaissent au dénominateur.

95. Si l'on admet maintenant que les deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$, ou seulement l'une d'entre elles, ne puissent pas se développer suivant les puissances entières de h lorsqu'on donne à x la valeur particulière a, conformément à ce qu'on a vu dans les nos 88 et suivants, la règle précédente ne pourra plus s'appliquer. Il faudra alors, pour connaître la valeur de la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ développer les deux termes de la fraction $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$ en deux séries qui contiendront des puissances négatives ou fractionnaires de h, puis faire $h=0$, après avoir supprimé le facteur commun au numérateur et au dénominateur.

96. Soit par exemple la fraction

$$\frac{x-x^{n+1}}{1-x},$$

dont on demande la valeur lorsque $x=1$. Le rapport des coefficients différentiels du premier ordre des deux termes est

$$\frac{1-(n+1)x^n}{-1},$$

et en faisant $x=1$, on trouve n. En effet la fonction proposée représente la somme des termes de la progression géométrique $x+x^2+x^3+\ldots+x^n$.

Soit encore la fraction

$$\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2},$$

qui est le coefficient différentiel du premier ordre de la précédente, et qui représente par conséquent la somme des termes de la série $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$. Le rapport des coefficients différentiels des deux termes est

$$\frac{-n(n+1)x^{n-1}+n(n+1)x^n}{-2(1-x)},$$

et comme il devient $\frac{0}{0}$ quand on fait $x=1$, on prendra le rapport des coefficients différentiels du second ordre, qui est

$$\frac{-(n-1)n(n+1)x^{n-2}+n^2(n+1)x^{n-1}}{2},$$

et en faisant $x=1$ on trouve $\frac{n(n+1)}{2}$ pour la valeur demandée.

Si la fonction proposée est

$$\frac{l(1+x)}{x^n},$$

n désignant un nombre positif, on a pour le rapport des coefficients différentiels des deux termes

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{nx^{n-1}}.$$

Ainsi la valeur de cette fonction correspondante à $x=0$ est $\frac{1}{0}$, 1 ou 0 suivant que l'exposant n est $>1, =1$, ou <1.

Il en est de même à l'égard des fractions $\frac{e^x-1}{x^n}$ et $\frac{\sin. x}{x^n}$, n désignant toujours un nombre positif. Quant à la fraction $\frac{1-\cos. x}{x^n}$, il faut passer aux coefficients différen-

tiels du second ordre, ce qui donne $\frac{\cos. x}{n(n-1)x^{n-2}}$. Ainsi la valeur de cette dernière fraction correspondante à $x=0$ est $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{2}$ ou 0 suivant que l'exposant n est >2, $=2$, ou <2. On voit par-là que x étant plus petite que toute grandeur donnée, ou infiniment petite, $1-\cos. x$ est infiniment petit par rapport à x ou à $\sin. x$.

97. Mais si l'on proposait une fonction telle que

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

et qu'on demandât sa valeur dans le cas où $x=a$, comme le numérateur et le dénominateur ne peuvent pas se développer suivant les puissances entières de h lorsqu'on y met $a+h$ à la place de x (leurs coefficients différentiels devenant infinis lorsqu'on y fait $x=a$), il faudrait, comme on l'a dit n° 95, faire $x=a+h$, ce qui donne

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a+h}.\sqrt{h}};$$

et en développant suivant les puissances de h, puis supprimant le facteur $\sqrt{h}$ commun aux deux termes de la fraction, il vient

$$\frac{1+\frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{a}}-\text{etc.}}{\sqrt{2a}+\frac{h}{2\sqrt{2a}}-\text{etc.}}.$$

On trouve donc, en faisant $h=0$, pour la valeur demandée,

$$\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

98. On se rend compte facilement de ces résultats par la géométrie. La fraction proposée étant $\frac{f(x)}{F(x)}$, soient Mn et MN (*fig.* 24) les courbes dont les coordonnées sont respectivement représentées par $f(x)$ et $F(x)$. Cette fraction exprime la valeur du rapport $\frac{Pn}{PN}$ des ordonnées des deux courbes qui correspondent à une même valeur OP de l'abscisse x; et puisque les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ deviennent nulles lorsque $x=a$, il s'ensuit nécessairement que les deux courbes se rencontrent en un même point de l'axe des x situé à la distance $OM=a$ de l'origine. Demander la valeur de la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ lorsque $x=a$, c'est donc demander la limite vers laquelle tend le rapport des deux ordonnées Pn, PN lorsque la distance MP tend à devenir nulle. Or, cette limite est évidemment le rapport des deux tangentes trigonométriques des angles formés avec l'axe des x par les tangentes menées aux deux courbes au point M, c'est-à-dire $\frac{f'(a)}{F'(a)}$.

Si les deux coefficients différentiels $f'(x)$ et $F'(x)$ étaient nuls pour la valeur $x=a$, les deux courbes auraient alors au point M l'axe des x pour tangente commune. La limite du rapport des ordonnées serait donnée par la valeur $\frac{f''(a)}{F''(a)}$, car le coefficient différentiel du second ordre est alors proportionnel, ainsi qu'on le verra dans la suite, à l'intervalle dont la courbe s'éloigne de l'axe des x, lorsqu'on s'avance sur cet axe à une distance infiniment petite du point de contact.

XI. DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS SIMPLES D'UNE VARIABLE.

1° Fonction x^m.

99. L'expression des coefficients des divers ordres de la fonction x^m a été donnée n° 54. On a généralement

$$\frac{d^\mu x^m}{dx^\mu} = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-\mu+1)\,x^{m-\mu}.$$

Il en résulte que l'expression de $(x+h)^m$, en tenant compte du reste de la série conformément à ce qu'on a vu n° 84, est

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}h^2 + \ldots..$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\mu}(x+\theta h)^{m-\mu}h^\mu,$$

θ désignant toujours un nombre compris entre zéro et l'unité. Nous admettrons dans ce qui va suivre que la valeur de x surpasse celle de h, et que x et h sont positives, ou plutôt sont de même signe : si ces deux quantités étaient de signes opposés ou étaient imaginaires, et si en même temps le module de h était plus petit que celui de x, le théorème auquel nous arriverons subsisterait encore, mais il exigerait une démonstration particulière. Les deux limites de la valeur du facteur $(x+\theta h)^{m-\mu}$ sont évidemment $x^{m-\mu}$ et $(x+h)^{m-\mu}$, en sorte que la valeur du développement est comprise entre les valeurs qui correspondent à ces deux limites ; et on peut prouver que le reste de la série se réduit à zéro pour $\mu=\infty$. Car, en prenant un terme de plus, les deux limites du terme qui représente ce reste seront égales aux limites pré-

cédentes multipliées respectivement par les rapports

$$\frac{m-\mu}{\mu+1}\frac{h}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{m-\mu}{\mu+1}\frac{h}{x\left(1+\frac{h}{x}\right)},$$

dont la valeur sera toujours plus petite que l'unité, pour des valeurs de μ très-grandes, si $\frac{h}{x}$ est lui-même plus petit que l'unité. Ces deux limites diminuent ainsi indéfiniment lorsque μ augmente, et il est aisé de voir qu'elles se réduisent à zéro, ainsi que le reste de la série, lorsque $\mu=\infty$. La série infinie x^m+ etc., est donc convergente et égale à $(x+h)^m$. Mais elle finirait par être divergente, quoiqu'elle pût être convergente dans les premiers termes, si $\frac{h}{x}$ était >1.

100. En divisant les deux membres par x^m, puis écrivant x à la place de $\frac{h}{x}$, on a

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3+\ldots\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{2.3\ldots\ldots\mu}(1+\theta x)^{m-\mu}x^\mu.$$

La série infinie qu'on obtiendra en faisant $\mu=\infty$ sera nécessairement convergente lorsque x sera <1.

D'après ce qui précède, la formule du binôme de Newton, qui est donnée dans les éléments pour le seul cas de l'exposant m entier et positif, se trouve démontrée, quel que soit cet exposant.

2° Fonction logarithmique log. x.

101. On a, conformément aux nos 19 et 57,

$$\frac{d^\mu.\log.x}{dx^\mu}=\pm\log.e.\,\frac{1.2.3........(\mu-1)}{x^\mu},$$

les signes supérieur et inférieur ayant lieu respectivement lorsque μ est impair ou pair. Par conséquent, d'après le n° 85, la valeur de log. $(x+h)$ est exprimée par

$$\log.(x+h)=\log.x+\log.e\left(\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-.....\pm\frac{h^\mu}{\mu(x+\theta h)^\mu}\right).$$

Le reste de la série se réduira à 0 pour $\mu=\infty$, pourvu que le rapport $\frac{h}{x}$ ne surpasse pas l'unité. On s'en convaincra en observant que les limites de ce reste sont égales aux facteurs $\frac{h^\mu}{\mu x^\mu}$ et $\frac{h^\mu}{\mu(x+h)^\mu}$ multipliés par $\pm\log.e$: toutefois cela suppose que le rapport $\frac{h}{x}$ est positif : s'il était négatif, il faudrait une autre démonstration que nous ne donnerons pas ici. Nous supposons le logarithme pris dans un système quelconque. S'il est pris dans le système dont la base est e, on fera log. $e=1$.

102. Si l'on fait $x=1$, et si l'on écrit ensuite x à la place de h, les formules précédentes donnent

$$\log.(1+x)=\log.e\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-......\pm\frac{x^\mu}{\mu(1+\theta x)^\mu}\right);$$

et si le logarithme est népérien, on a simplement

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\pm\frac{x^\mu}{\mu(1+\theta x)^\mu}.$$

Les séries sont convergentes lorsque x est compris entre $+1$ et -1.

En faisant $x=1$ la dernière équation donne

$$l2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{etc.};$$

et en faisant $x=-1$,

$$l0=-\frac{1}{0}=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}\right).$$

Ainsi la suite $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$etc., n'est pas convergente.

Si l'on ajoute entre elles les deux équations suivantes

$$\log.(1+x)=\log.e\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\right)$$

$$-\log.(1-x)=\log.e\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\right),$$

il viendra

$$\log.\frac{1+x}{1-x}=2\log.e\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\text{etc.}\right).$$

103. Nous indiquerons succinctement la manière dont on a effectué le calcul des logarithmes. La série qui donne log. $(1+x)$, lorsqu'on y fait $x=y-1$, devient

$$\log.y=\log.e\left[y-1-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+\text{etc.}\right],$$

et si le logarithme était népérien, cas dans lequel nous le désignons simplement par la lettre l, on aurait

$$ly=y-1-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+\text{etc.}$$

Ces formules ne pourraient être employées qu'autant que le nombre y différerait très-peu de l'unité. Mais si l'on fait $y = \sqrt[r]{z}$, r désignant un nombre quelconque, la première donnera

$$\log.z = r\log.e\left[\sqrt[r]{z}-1-\frac{1}{2}(\sqrt[r]{z}-1)^2+\frac{1}{3}(\sqrt[r]{z}-1)^3-\text{etc.}\right];$$

et si le nombre r est pris négativement,

$$\log.z = r\log.e\left[1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^3-\text{etc.}\right].$$

Ces deux séries, dans lesquelles on peut donner à r telle valeur que l'on veut, seront convergentes, la première lorsque le nombre r sera tel que l'on ait $\sqrt[r]{z}<2$, et la seconde lorsque l'on aura $\sqrt[r]{z}>\frac{1}{2}$. On voit d'ailleurs que la première série ayant des termes alternativement positifs et négatifs, tandis que tous ceux de la seconde sont positifs, on a

$$\log.z < r\log.e(\sqrt[r]{z}-1) \qquad \text{et} \qquad \log. > r\log.e\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right).$$

Ce qui donne deux limites que l'on peut resserrer à volonté en augmentant l'exposant r du radical.

104. Il est nécessaire d'ailleurs de connaître $\log.e$. On y parvient en remarquant que a désignant la base du système auquel appartient $\log.z$, on a $e = a^{\log.e}$; et en prenant de part et d'autre les logarithmes népériens $1 = \log.e.la$; d'où $\log.e = \frac{1}{la}$. L'expression de ly du n° précédent donne ensuite, en faisant $y = a$,

$$la=\frac{1}{\log.e}=a-1-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4+\text{etc}$$

et par conséquent

$$la=\frac{1}{\log.e}=r\left[\sqrt[r]{a}-1-\frac{1}{2}(\sqrt[r]{a}-1)^2+\frac{1}{3}(\sqrt[r]{a}-1)^3+-\text{etc.}\right];$$

$$la=\frac{1}{\log.e}=r\left[1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^3+\text{etc.}\right].$$

Le nombre *la*, c'est-à-dire le logarithme népérien de la base du système, est nommé par les géomètres le *module.* Dans le système des logarithmes népériens le module est égal à l'unité. Les logarithmes pris dans le système dont la base est a étant multipliés par *la* ou le module, deviendront des logarithmes népériens.

105. Dans le système des logarithmes ordinaires la base $a=10$. En prenant $r=2^{60}$ on trouve, en extrayant 60 fois la racine carrée du nombre 10,

$$\sqrt[2^{60}]{10}=1,00000\ 00000\ 00000\ 00\,199\ 71742\ 08125\ 50527$$

$$\frac{1}{2^{60}}=1,00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40354.$$

Donc

$$\frac{1}{la}=\log.e=\frac{86\ 73617\ 37988\ 40354}{199\ 71772\ 08125\ 50527}=0,43429\ 44819,$$

et

$$la=\frac{1}{\log.e}=2,30258\ 50930.$$

On doit multiplier par ce dernier nombre les logarithmes ordinaires pour les changer en logarithmes népériens.

D'après cela le logarithme quelconque, de 3 par exem-

ple, s'obtiendra en extrayant soixante fois sa racine carrée, ce qui donne

$$\sqrt[2^{60}]{3}=1,00000\ 00000\ 00000\ 00095\ 28942\ 64074\ 58932,$$

d'où

$$\log.3=\frac{\sqrt[2^{60}]{3}-1}{\sqrt[2^{60}]{10}-1}=\frac{95\ 28942\ 64074\ 58932}{199\ 71742\ 08125\ 50527}=0,47712\ 12547\ 19662.$$

On peut remarquer que, d'après la formule du n° 94, on a, en négligeant le carré et les puissances supérieures de x, $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}$; d'où l'on conclut facilement que lorsqu'on extrait la racine carrée d'un nombre qui n'a que l'unité avant la virgule, et qu'on s'arrête à deux fois autant de décimales qu'il y a de zéros après la virgule, la partie décimale de la racine est exactement la moitié de la partie décimale du nombre. Comme la formule du n° 102 donne d'ailleurs $\log.(1+x)=x\log.e$, on reconnaît de plus que les parties décimales dont il s'agit sont proportionnelles aux logarithmes et les donnent immédiatement.

(*Voyez* sur ce sujet le *Précis* qui est devant des *Tables de logarithmes* de Callet.)

3° Fonction exceptionnelle a_x.

106. D'après les n°s 22 et 58 on a $\frac{d^\mu.a^x}{dx^\mu}=(la)^\mu.a^x$, d'où l'on conclut

$$a^{x+h}=a^x\left(1+la.h+\frac{(la)^2}{2}h^2+\frac{(la)^3}{2.3}+\ldots..+\frac{(la)^\mu a^{\theta h}}{2.3.4\ldots\mu}h^\mu\right).$$

Les deux limites du terme qui exprime le reste de la série comprise dans la parenthèse sont respectivement $\frac{(la)^\mu}{2.3.4\ldots.\mu}h^\mu$, et $\frac{(la)^\mu a^h}{2.3.4\ldots.\mu}h^\mu$. Dans cette expression la est le logarithme népérien du nombre a. La série est convergente, quelles que soient h et x; car en prenant un terme de plus, les expressions des limites du reste seront égales aux précédentes multipliées par $\frac{la.h}{\mu+1}$, d'où l'on conclut que les restes tendent à devenir nuls lorsque μ augmente indéfiniment.

107. En divisant par a^x, puis écrivant x à la place de h, il vient

$$a^x = 1 + la.x + \frac{(la)^2}{2}x^2 + \frac{(la)^3}{2.3}x^3 + \ldots\ldots + \frac{(la)^\mu a^{\theta x}}{2.3.4\ldots.\mu}x^\mu.$$

Si l'on fait $x = 1$, on a

$$a = 1 + la + \frac{(la)^2}{2} + \frac{(la)^3}{2.3} + \frac{(la)^4}{2.3.4} + \text{etc.},$$

ce qui donne la base a en fonction du module, comme la série du n° 104 donne le module en fonction de la base.

Si l'on fait $a = e$, on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \text{etc}.,$$

série qui est toujours convergente. En supposant $x = 1$, on retrouve, comme cela doit être, l'expression du nombre e donnée n° 16.

4° Fonctions trigonométriques sin. x et cos. x.

108. Nous avons, d'après le n° 59,

$$\frac{d^\mu . \sin. x}{dx^\mu} = \sin. \left(x + \frac{\mu\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{d^\mu . \cos. x}{dx^\mu} = \cos. \left(x + \frac{\mu\pi}{2}\right).$$

Par conséquent,

$$\sin.(x+h) = \sin. x + \cos. x . h - \frac{\sin. x}{2} h^2 - \frac{\cos. x}{2.3} h^3 +$$

$$+ \frac{\sin. x}{2.3.4} h^4 + \ldots\ldots + \frac{\sin. \left(x + \theta h + \frac{\mu\pi}{2}\right)}{2.3.4\ldots\ldots\ldots\mu} h^\mu$$

$$\cos.(x+h) = \cos. x - \sin. x . h - \frac{\cos. x}{2} h^2 + \frac{\sin. x}{2.3} h^3 +$$

$$+ \frac{\cos. x}{2.3.4} h^4 - \ldots\ldots + \frac{\cos. \left(x + \theta h + \frac{\mu\pi}{2}\right)}{2.3.4\ldots\ldots\ldots\mu} h^\mu.$$

Comme la valeur du sinus ou du cosinus d'un arc quelconque est toujours comprise entre -1 et $+1$, les termes qui représentent les restes de ces deux séries sont nécessairement compris entre $-\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots.\mu}$ et $+\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots.\mu}$.

Les séries sont toujours convergentes, quelles que soient h et x, puisqu'en prenant un terme de plus les limites des restes sont égales aux précédentes multipliées par le rapport $\frac{h}{\mu+1}$, rapport qui diminue indéfiniment lorsque μ augmente de plus en plus.

109. On peut faire $x=0$, puis écrire x à la place de h, ce qui donnera

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

$$\cos. x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

On a deux limites de chacune de ces séries, qui sont toujours convergentes, en s'arrêtant alternativement à un terme positif ou à un terme négatif. Ces expressions ont été données par Newton.

On ne doit point perdre de vue d'ailleurs, soit en faisant usage de ces formules, soit dans toute autre occasion, que la lettre x désignant un arc est toujours le nombre abstrait qui exprime la longueur de cet arc dans la circonférence dont le rayon est l'unité. Tant que la quantité x est sous les signes sin., cos., tang., etc., on peut concevoir cette quantité exprimée en degrés du quart de cercle; mais on doit, quand elle est hors de ces signes, lui donner sa véritable expression. Si on continue à l'exprimer en degrés, dont 90 forment le quart de cercle, il faut alors multiplier le nombre de degrés par le rapport $\frac{\pi}{180^\circ}$.

110. Nous prendrons encore pour exemple la fonction y=arc. tang. x. On a, d'après le n° 35,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \cos.^2 y.$$

Donc, en différentiant, et considérant que dans second membre y est fonction de x,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos. y. \sin. y. \frac{dy}{dx} = -2\cos. y. \sin. y. \cos.^2 y$$
$$= -\sin. 2y. \cos.^2 y.$$

En continuant à différentier, on trouve

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2(\cos.2y.\cos.^2y - \sin.2y.\cos.y.\sin.y)\frac{dy}{dx}$$
$$= -2\cos.3y.\cos.^3y,$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2.3(\sin.3y.\cos.^3y + \cos.3y.\cos.^2y.\sin.y)\frac{dy}{dx}$$
$$= 2.3\sin.4y.\cos.^4y,$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = 2.3.4\,(\cos.4y.\cos.^4y - \sin.4y.\cos.^3y.\sin.y)\frac{dy}{dx}$$
$$= 2.3.4\cos.5y.\cos.^5y,$$

et ainsi de suite. Ainsi l'on a

$$\text{arc. tang.}(x+h) = y + \cos.y.\cos.y.h - \sin.2y.\cos.^2y.\frac{h^2}{2}$$
$$-\cos.3y.\cos.^3y.\frac{h^3}{3} + \sin.4y.\cos.^4y.\frac{h^4}{4} + \cos.5y.\cos.^5y.\frac{h^5}{5} - \text{etc.},$$

formule qui donne l'expression de l'arc, dont la tangente est $x+h$, en fonction de l'arc dont la tangente est x.

Si l'on suppose $x=0$, il vient

$$\text{arc. tang.}\,h = h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} - \frac{h^7}{7} + \text{etc.}$$

Cette dernière formule a été donnée par Leibnitz. On en déduit en faisant $h=1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

expression remarquable du rapport de la circonférence au diamètre.

XII. RELATIONS QUI EXISTENT ENTRE LES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

111. On sait que, conformément aux notations adoptées dans l'analyse, on exprime par le signe $\sqrt{-1}$ la quantité qui, étant multipliée par elle-même, donnerait -1. Quoique cette quantité, à proprement parler, n'existe pas, et que l'expression $\sqrt{-1}$ et toutes les fonctions qui en dépendent soient par cette raison appelées *imaginaires*, on peut néanmoins les soumettre à toutes les opérations analytiques, en considérant $\sqrt{-1}$ comme une constante. Nous remarquerons que l'on a pour l'expression des puissances de $\sqrt{-1}$

$$(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4=1$$
$$(\sqrt{-1})^5=\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^6=-1$$
etc.

Nous rappellerons aussi que si l'on a une équation telle que

$$A+B\sqrt{-1}=P+Q\sqrt{-1},$$

A, B, P, Q étant des quantités réelles, on en conclut nécessairement

$$A=P \quad \text{et} \quad P=Q;$$

par conséquent si l'on a

$$A+B\sqrt{-1}=P, \quad \text{ou} \quad A+B\sqrt{-1}=Q\sqrt{-1},$$

on en conclut de la même manière

$$A=P \quad \text{et} \quad B=0, \qquad \text{ou} \qquad A=0 \quad \text{et} \quad B=Q.$$

112. La quantité imaginaire

$$a+b\sqrt{-1}$$

peut toujours se mettre sous la forme

$$\rho(\cos.\varphi+\sqrt{-1}\sin.\varphi),$$

ρ et φ désignant deux quantités réelles, dont les valeurs sont déterminées en posant

$$\rho\cos.\varphi=a,\quad \text{d'où}\quad \rho=+\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos.\varphi=\frac{a}{\rho}$$

$$\rho\sin.\varphi=b\qquad\qquad \sin.\varphi=\frac{b}{\rho}.$$

La quantité ρ, qui est toujours un nombre positif, est appelée le *module* de l'expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$; φ représente l'un quelconque des angles, dont le cosinus et le sinus sont donnés par ces expressions.

113. Cela posé, reprenons le développement de la fonction e^x donné n° 107, qui est

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}$$

En substituant dans cette équation $x\sqrt{-1}$ à la place de x, elle deviendra

$$\sqrt{-1}=1+x\sqrt{-1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3\sqrt{-1}}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6}-\frac{x^7\sqrt{-1}}{2.3\,4.5.6.7}+\text{etc.}$$

Or, en comparant cette série aux développements de cos. x et sin. x donnés n° 109, on voit qu'elle revient à cos. $x+\sqrt{-1}$ sin. x. Donc

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x,$$

8

et en changeant le signe de x,

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos. x - \sqrt{-1}\,\sin. x\,;$$

équations qui ont été données par Euler, et qui sont d'une grande importance dans l'analyse.

On en déduit immédiatement

$$\cos. x = \frac{e^{x\sqrt{x-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

114. Les formules précédentes peuvent être regardées comme renfermant tous les résultats que l'on peut tirer de la considération des angles. En effet, si l'on multiplie l'une par l'autre les équations

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1}\,\sin. x$$
$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos. y + \sqrt{-1}\,\sin. y$$

on trouvera

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = \cos. x\cos. y - \sin. x\sin. y + \sqrt{-1}\,(\cos. x\sin. y + \sin. x\cos. y)$$

Mais d'un autre côté

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = \cos.(x+y) + \sqrt{-1}\,\sin.(x+y)\,:$$

donc, d'après ce qui a été dit n° **111**,

$$\cos.(x+y) = \cos. x\cos. y - \sin. x\sin. y$$
$$\sin.(x+y) = \cos. x\sin. y + \sin. x\cos. y$$

formules dont on déduit toute la trigonométrie.

115. On peut former, au moyen des expressions de cos. x et sin. x en exponentielles imaginaires, celles

de toutes les autres lignes trigonométriques. On a, par exemple,

$$\text{tang.}\, x = \frac{\sin.\, x}{\cos.\, x} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}},$$

ou

$$\text{tang.}\, x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}.$$

On tire de cette équation

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1 + \sqrt{-1}\, \text{tang.}\, x}{1 - \sqrt{-1}\, \text{tang.}\, x},$$

et par conséquent

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1 + \sqrt{-1}\, \text{tang.}\, x}{1 - \sqrt{-1}\, \text{tang.}\, x}.$$

Donc, en développant le logarithme par la formule qui est à la fin du n° 102, on a

$$x = \text{tang.}\, x - \frac{1}{3}\, \text{tang.}^3 x + \frac{1}{5}\, \text{tang.}^5 x - \frac{1}{7}\, \text{tang.}^7 x + \text{etc.}$$

Nous retrouvons ainsi la série de Leibnitz, qui a été donnée ci-dessus, n° 110.

116. Il importe de considérer d'ailleurs que les développements

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

$$\sin.\, x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$\cos.\, x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

subsistent lorsqu'on donne à l'arc x une valeur quel

conque imaginaire $x=m+n\sqrt{-1}$. On peut vérifier, en effet, que la substitution de $m+n\sqrt{-1}$ à la place de x dans la première série, ou la multiplication des deux séries qui représentent respectivement les valeurs de e^m et $e^{n\sqrt{-1}}$ donnent le même résultat. On remarquera de même que

$$\sin.(m+n\sqrt{-1})=\sin.m.\cos.n\sqrt{-1}+\cos.m.\sin.n\sqrt{-1};$$

or, si, après avoir formé les développements de sin. m et de cos. $n\sqrt{-1}$, on les multiplie l'un par l'autre, et on les ajoute au produit des développements de cos. m et de sin. $n\sqrt{-1}$, on trouvera le même résultat qu'en faisant $x=m+n\sqrt{-1}$ dans la série qui représente la valeur de sin. x. On a également

$$\cos.(m+n\sqrt{-1})=\cos.m.\cos.n\sqrt{-1}-\sin.m.\sin.n\sqrt{-1};$$

et l'on reconnaît que le produit des développements de sin. m et sin. $n\sqrt{-1}$, donne le même résultat que la substitution de $m+n\sqrt{-1}$ à la place de x dans la série qui représente cos x.

Il résulte de cette remarque que les équations posées dans les n°s 113 et 114, qui expriment les relations existantes entre les fonctions exponentielles trigonométriques conviennent également aux cas où l'on attribuerait à la variable x la valeur imaginaire $m+n\sqrt{-1}$.

Formule de Moivre. Résolution des équations binômes.

117. Reprenons l'équation du n° 113

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x,$$

dans laquelle x représente un nombre quelconque, et où l'on peut attribuer indifféremment le signe + ou le signe — au radical $\sqrt{-1}$. Si l'on écrit mx au lieu de x, m désignant aussi un nombre constant quelconque (pourvu qu'il soit réel), il viendra

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \cos. mx + \sqrt{-1}\sin. mx.$$

Mais si l'on élève les deux nombres de l'équation précédente à la puissance m, on aura

$$e^{mx\sqrt{-1}} = (\cos. x + \sqrt{-1}\sin. x)^m.$$

Donc

$$(\cos. x + \sqrt{-1}\sin. x)^m = \cos. mx + \sqrt{-1}\sin. mx,$$

formule très-importante dans l'analyse, qui a été donnée par Moivre.

D'après ce qui précède, cette formule se trouve démontrée, quelle que soit la valeur de l'exposant m. On peut y parvenir bien simplement dans le cas où m est un nombre entier positif en formant les puissances successives de $\cos. x + \sqrt{-1}\sin. x$. En effet, on a évidemment

$$(\cos. x + \sqrt{-1}\sin. x)^2 = \cos.^2 x + 2\sqrt{-1}\sin. x\cos. x - \sin.^2 x$$

d'où résulte

$$(\cos. x + \sqrt{-1}\sin x)^2 = \cos. 2x + \sqrt{-1}\sin. 2x :$$

on a de même

$$(\cos. x + \sqrt{-1}\sin. x)^3 = (\cos. x + \sqrt{-1}\sin. x)(\cos. 2x + \sqrt{-1}\sin. 2x),$$

d'où l'on tire, en développant

$$(\cos. x + \sqrt{-1}\sin. x)^3 = \cos. 3x + \sqrt{-1}\sin. 3x,$$

et ainsi de suite.

118. La formule de Moïvre donne immédiatement l'expression des racines des équations

$$x^n - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^n + 1 = 0,$$

n étant un nombre entier. Supposons, en effet,

$$x = \rho\,(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\,\sin.\varphi),$$

ρ étant > 0 et φ désignant un angle quelconque. On aura donc

$$x^n = \rho^n\,(\cos. n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin. n\varphi);$$

et, en substituant dans l'équation $x^n - 1 = 0$,

$$\rho^n\,(\cos. n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin. n\varphi) - 1 = 0.$$

Cette dernière équation ne peut être satisfaite, d'après ce qui a été dit n° **111**, qu'autant que l'on aura séparément

$$\rho^n \cos. n\varphi - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \sin. n\varphi = 0; \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{2i\pi}{n} \text{ et } \rho = 1,$$

i désignant un nombre entier quelconque. Donc

$$x = \cos. \frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin. \frac{2i\pi}{n},$$

expression qui doit donner toutes les racines réelles et imaginaires de l'équation $x^n - 1 = 0$. En effet, faisant $i = 0$, on a d'abord $x = 1$, ce qui est la racine réelle que cette équation donne nécessairement : faisant encore $i = 2$, $i = 3$, $i = 4$, etc., jusqu'à $i = n - 1$, on aura $n - 1$ autres racines différentes, qui toutes appartiennent à la proposée. En faisant $i = n$, on retrouve la racine réelle $x = 1$. En faisant $i = n + 1$, on retrouve la même racine qui avait été donnée par la supposition de $i = 2$; et ainsi des autres. Ainsi la formule précédente exprime bien les n racines réelles ou imaginaires de l'équation $x^n - 1 = 0$, et seulement ces n racines, qui répondent aux premières valeurs de i depuis 0 jusqu'à $n - 1$ inclu-

sivement. Nous remarquerons d'ailleurs que dans le cas où le nombre n est pair, l'expression générale des racines donne, en faisant $i=\frac{n}{2}$, $x=-1$, c'est-à-dire la seconde racine réelle qui appartient alors à l'équation proposée.

Les racines de l'équation $x^n-1=0$ ou $x^n=1$, qui sont exprimées respectivement d'après ce qui précède par

$$x=\cos.\frac{0.\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin.\frac{0.\pi}{n}$$

$$x=\cos.\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin.\frac{2\pi}{n}$$

$$x=\cos.\frac{4\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin.\frac{4\pi}{n}$$

$$x=\cos.\frac{6\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin.\frac{6\pi}{n}$$

....

....

$$x=\cos.\frac{2(n-1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin.\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

sont appelées *racines de l'unité*.

119. Si l'on substitue l'expression

$$x=\rho(\cos.\varphi+\sqrt{-1}\sin.\varphi)$$

dans l'équation $x^n+1=0$ on trouve de même

$$\rho^n(\cos.n\varphi+\sqrt{-1}\sin.n\varphi)+1=0,$$

équation qui ne peut être satisfaite qu'autant que l'on a séparément

$$\rho^n\cos.n\varphi+1=0 \quad \text{et} \quad \sin.n\varphi=0\,; \quad \text{d'où} \quad \varphi=\frac{(2i+1)\pi}{n} \ \text{et}\ \rho=1,$$

i désignant toujours un nombre entier. Donc, l'expression

$$x=\cos.\frac{(2i+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin.\frac{(2i+1)\pi}{n}$$

doit donner toutes les racines de l'équation $x^n+1=0$. En faisant successivement $i=0$, $i=1$, $i=2$, etc., jusqu'à $i=n-1$, on trouve effectivement, comme dans le cas précédent, n valeurs différentes qui sont les n racines demandées. Et si l'on supposait ensuite $i=n$, $i=n+1$, $i=n+2$, etc., ces mêmes valeurs se reproduiraient successivement dans le même ordre. Lorsque le nombre n est pair, les racines dont il s'agit sont toutes imaginaires ; mais s'il est impair, l'expression générale des racines donne, en faisant $i=\frac{n-1}{2}$, $x=-1$, c'est-à-dire la racine réelle unique qui appartient alors à l'équation proposée.

120. Ces résultats deviendront plus sensibles si l'on remarque que la circonférence du cercle (*fig.* 25) ayant été partagée à partie de l'extrémité 0 du diamètre en $2n$ parties égales, on trouvera, en considérant les points de division 0, 2, 4, 6, 8, etc., de numéro pair, les arcs auxquels appartiennent les cosinus et sinus qui entrent dans l'expression des racines de l'équation $x^n-1=0$; et qu'en considérant les points de division 1, 3, 5, 7, 9, etc., de numéro impair, on trouvera également les arcs auxquels appartiennent les cosinus et sinus qui entrent dans l'expression des racines de l'équation $x^n+1=0$.

121. Remarquons que les différents angles compris dans les expressions $\frac{2i\pi}{n}$ ou $\frac{(2i+1)\pi}{n}$ sont toujours tels que le même cosinus, et des sinus égaux et de signes contraires, appartiennent à deux de ces angles. L'ambiguité du signe radical $\sqrt{-1}$ exige en effet que chaque

racine de l'équation $x^n-1=0$ puisse également être exprimée par

$$x=\cos.\frac{2i\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{n}$$

et par

$$x=\cos.\frac{2i\pi}{n}-\sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{n}.$$

Or, si l'on multiplie l'un par l'autre les deux facteurs du premier degré

$$x-\cos.\frac{2i\pi}{n}-\sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{n} \text{ et } x-\cos.\frac{2i\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{n},$$

on trouve pour résultat l'expression réelle

$$x^2-2x\cos.\frac{2i\pi}{n}+1,$$

qui représente d'une manière générale les facteurs du second degré appartenant à l'expression x^n-1. En effet, si l'on attribue à i, dans cette expression, toutes les valeurs entières qui ne surpassent pas $\frac{n}{2}$, et si on l'égale à zéro, on aura autant d'équations du second degré qui donneront les racines simples de la proposée. Il faut remarquer toutefois qu'en faisant $i=0$, l'expression dont il s'agit devient x^2-2x+1, ou $(x-1)(x-1)$. Cependant on ne devrait prendre que le facteur simple $x-1$, si l'on voulait reproduire la proposée par la multiplication des facteurs correspondants à ses racines. De même, en faisant $i=\frac{n}{2}$, lorsque n est un nombre pair, l'expression précédente devient x^2+2x+1, ou $(x+1)(x+1)$, et néanmoins on ne doit compter que le seul facteur simple $x+1$.

On verra de la même manière que les racines imaginaires de l'équation $x^n+1=0$, multipliées deux à deux, produisent des facteurs réels du second degré, dont l'expression générale est

$$x^2-2x\cos.\frac{(2i+1)\pi}{n}+1,$$

et donne lieu à des remarques semblables aux précédentes.

122. Les résultats auxquels on vient de parvenir s'appliquent évidemment aux équations, telles que

$$x^n-a=0 \quad \text{ou} \quad x^n+a=0,$$

a désignant un nombre quelconque; car, en faisant $\frac{x}{\sqrt[n]{a}}=y$, elles reviennent à $y^n-1=0$ et $y^n+1=0$. On voit donc que la racine n^{me} du nombre quelconque a présente généralement n valeurs, qui sont égales au produit de la valeur arithmétique $\sqrt[n]{a}$ multipliée par les n racines de l'unité; c'est-à-dire que l'on doit concevoir, afin de donner aux expressions la généralité que comporte l'analyse, la racine n^{me} de $+a$ représentée par l'expression

$$\sqrt[n]{a}\left(\cos.\frac{2i\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{n}\right);$$

et de même la racine n^{me} de $-a$ représentée par l'expression

$$\sqrt[n]{a}\left(\cos.\frac{(2i+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin.\frac{(2i+1)\pi}{n}\right).$$

On obtiendra les n valeurs cherchées en attribuant successivement à i les valeurs entières 0, 1, 2, 3....$n-1$,

Quand il s'agit de $\sqrt[n]{+a}$, il n'existe qu'une seule valeur réelle $\sqrt[n]{a}$, si n est impair ; et deux valeurs réelles $\pm\sqrt[n]{a}$, si n est pair. Quand il s'agit de $\sqrt[n]{-a}$, il existe une seule valeur réelle $-\sqrt[n]{a}$, si n est impair ; et il n'existe aucune valeur réelle si n est pair.

123. L'obligation qui nous est imposée de considérer dans tous les cas l'expression $\sqrt[n]{a}$, a désignant un nombre quelconque positif ou négatif, comme présentant un nombre n de valeurs distinctes réelles ou imaginaires, donne lieu à faire quelques remarques nécessaires pour l'interprétation générale de la formule de Moivre, présentée n° 117,

$$(\cos. x+\sqrt{-1}\sin. x)^m=\cos. mx+\sqrt{-1}\sin. mx.$$

Tant que le nombre m est entier, chaque membre de l'équation a une valeur unique, et ces deux valeurs sont identiques, comme on s'en assure en formant la puissance m de $\cos. x+\sqrt{-1}\sin. x$ par la multiplication. Mais si l'exposant m est une fraction $\frac{1}{q}$ ou plus généralement un nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$ (p et q désignant des nombres entiers premiers entre eux), le premier membre doit, d'après ce qui précède, présenter q valeurs distinctes. Or on mettra ces valeurs en évidence si l'on introduit dans le second membre le facteur $\cos.\frac{2i\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{q}$ qui donne les q racines de l'unité, en y attribuant à i un nombre q de valeurs entières consécutives quelconques. Nous écrirons donc

$$(\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x)^{\frac{p}{q}}=\left(\cos.\frac{p}{q}x+\sqrt{-1}\sin.\frac{p}{q}x\right)\left(\cos.\frac{2i\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{q}\right)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x)^{\frac{p}{q}}=\left(\cos.\frac{px+2i\pi}{q}+\sqrt{-1}\sin.\frac{px+2i\pi}{q}\right);$$

ou enfin, puisque p étant un nombre entier on peut écrire pi au lieu de i,

$$(\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x)^{\frac{p}{q}}=\cos.\frac{p}{q}(x+2i\pi)+\sqrt{-1}\sin.\frac{p}{q}(x+2i\pi).$$

Ainsi tout se réduit pour obtenir les q valeurs que doit présenter le second membre de l'équation

$$(\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x)^{\frac{p}{q}}=\cos.\frac{p}{q}x+\sqrt{-1}\sin.\frac{p}{q}x,$$

à concevoir que l'on augmente successivement l'angle x des multiples $0, 1, 2, 3, \ldots q-1$ de la circonférence 2π.

124. Les résultats précédents donnent également la résolution des équations de la forme

$$x^{2n}+ax^n+b=0.$$

En effet, en prenant d'abord la valeur de x^n, on a

$$x^n=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b};$$

et si le second membre est réel, il reste simplement à résoudre l'équation

$$x^n+\frac{a}{2}\mp\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=0,$$

semblable à celle du n° 122.

Si le second membre est imaginaire, c'est-à-dire si b étant positif a^2 est $< 4b$, l'équation proposée, en posant $\cos g = \sqrt{\frac{a^2}{4b}}$ et $y = \frac{x}{\sqrt[2n]{b}}$, peut être remplacée par l'une ou l'autre des deux équations suivantes,

$$y^{2n} - 2\cos.g.y^n + 1 = 0,$$
$$y^{2n} + 2\cos.g.y^n + 1 = 0,$$

selon que le second terme est négatif ou positif. En considérant d'abord le premier cas, et substituant dans l'équation

$$y^{2n} - 2\cos.g.y^n + 1 = 0$$

l'expression

$$y = \rho(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi),$$

où ρ est essentiellement positif, il vient

$$\rho^{2n}(\cos.2n\varphi + \sqrt{-1}\sin.2n\varphi) - 2\rho^n\cos.g(\cos.n\varphi + \sqrt{-1}\sin.n\varphi) + 1 = 0;$$

c'est-à-dire

$$\rho^{2n}\cos.2n\varphi - 2\rho^n\cos.g.\cos.n\varphi + 1 = 0$$
$$\rho^{2n}\sin.2n\varphi - 2\rho^n\cos.g.\sin.n\varphi = 0,$$

à cause de $\sin.2n\varphi = 2\sin.n\varphi\cos.n\varphi$, la dernière équation donne

$$\rho^n = \frac{\cos.g}{\cos.n\varphi},$$

valeur que je substitue dans le second membre de la première équation mise sous la forme

$$\frac{1}{\rho^n} = 2\cos.g\cos.n\varphi - \rho^n\cos.2n\varphi.$$

Je trouve ainsi $\frac{1}{\rho^n} = \frac{\cos.g}{\cos.n\varphi}$, d'où résulte $\rho^n = \frac{1}{\rho^n}$ ou $\rho = 1$, puis

$$\cos.n\varphi = \cos.g, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi = \frac{2i\pi \pm g}{n},$$

i désignant toujours un nombre entier quelconque. Les racines demandées sont donc représentées par l'expression

$$y = \cos.\frac{2i\pi \pm g}{n} + \sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi \pm g}{n},$$

dans laquelle on donnera à i toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à n. Les facteurs réels du second degré appartenant à l'équation dont il s'agit sont représentés par l'expression

$$y^2 - 2y\cos.\frac{2i\pi \pm g}{n} + 1.$$

En considérant ensuite le second cas, et substituant dans l'équation

$$y^{2n} + 2\cos.g.y^n + 1 = 0$$

l'expression

$$y = \rho(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi),$$

on trouve encore $\rho = 1$, puis

$$\cos.n\varphi = -\cos.g; \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{(2i+1)\pi \pm g}{n}.$$

Les racines sont alors exprimées par

$$y = \cos.\frac{(2i+1)\pi \pm g}{n} + \sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi \pm g}{n};$$

et les facteurs réels du second degré par

$$y^2 - 2y\cos.\frac{(2i+1)\pi \pm g}{n} + 1.$$

125. La décomposition des équations à deux termes en facteurs réels du premier et du second degré correspond à une proposition géométrique très-remarquable, connue sous le nom de *Théorème de Cotes*, qui l'a donné le premier. A étant le centre d'un cercle (*fig.* 26 et 27) dont le rayon est égal à l'unité, soit portée sur un diamètre la distance AB$=x$. Soit un angle quelconque

$0B1$ compté à partir de ce diamètre, et désigné par φ. Appelons y la distance B1. On aura évidemment

$$y = \sqrt{(\cos.\varphi - x)^2 + \sin.\varphi^2}$$

et

$$y^2 = x^2 - 2x\cos.\varphi + 1.$$

Cela posé, imaginons que l'on ait partagé à partir du point 0 le circonfèrence 2π en un nombre $2n$ de parties égales, et désignons respectivement par $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{2n-1}$ les longueurs des lignes B0, B1, B2, B3, etc. En attribuant successivement à l'angle φ dans l'expression précédente de y^2 les valeurs $\frac{0.\pi}{n}, \frac{1.\pi}{n}, \frac{2.\pi}{n}; \frac{3.\pi}{n}, \ldots\ldots \frac{(2n-1)\pi}{n}$ cette expression donnera

$$y_0^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{0.\pi}{n} + 1$$

$$y_1^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{1.\pi}{n} + 1$$

$$y_2^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{2.\pi}{n} + 1$$

$$y_3^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{3.\pi}{n} + 1$$

$$y_4^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{4.\pi}{n} + 1$$

$$y_5^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{5.\pi}{n} + 1$$

....

....

$$y^2_{2n-2} = x^2 - 2x\cos.\frac{(2n-2)\pi}{n} + 1$$

$$y^2_{2n-1} = x^2 - 2x\cos.\frac{(2n-1)\pi}{n} + 1.$$

Or, il est visible qu'en prenant respectivement les y^2 de numéro pair ou les y^2 de numéro impair, nous avons ici

les facteurs du second degré des fonctions x^n-1 et x^n+1 dont les expressions générales ont été données n° 121. On voit de plus que les divisions, également éloignées des extrémités du diamètre AB, donnent pour y des valeurs identiques, en sorte qu'on a toujours $y_{n-1}=y_{n+1}$, $y_{n-2}=y_{n+2}$, etc. Enfin, on observe que, d'après ce qui a été dit dans le numéro cité, on ne doit prendre qu'une fois les facteurs simples donnés par les facteurs du second degré qui répondent aux points de division placés aux extrémités du diamètre. D'après cela, on aura évidemment

$$x^n-1=y_0.y_2.y_3.y_4.\dots\dots\dots y_{2n-2}$$
$$x^n+1=y_1.y_3.y_5.y_7.\dots\dots\dots y_{2n-1},$$

équations qui renferment l'énoncé du Théorème de Cotes.

Si la construction était faite dans un cercle dont le rayon fût ρ, on conserverait aux lignes de la figure leurs rapports en réduisant le rayon du cercle à l'unité, et x à $\frac{x}{\rho}$. Donc on a également

$$x^n-\rho^n=y_0.y_2.y_4.y_6.\dots\dots y_{2n-2}$$
$$x^n+\rho^n=y_1.y_3.y_5.y_7.\dots\dots y_{2n-2},$$

y_0, y_1, y_2, etc., représentant dans ces dernières équations les longueurs des lignes B0, B1, B2, etc., dans le cercle dont le rayon est ρ.

126. Une construction semblable s'applique à la décomposition en facteurs des équations $x^{2n}-2\cos.g.\,x^n+1=0$ et $x^{2n}+2\cos.\,g.\,x^n+1=0$, dont on s'est occupé n° 124. D'après les expressions des facteurs réels du second degré qui appartiennent à ces équations, et qui ont été données dans le numéro cité, on reconnaît

que les carrés des lignes B0, B1, B2, etc., représenteront ces facteurs, pourvu qu'au lieu de diviser la circonférence en $2n$ parties égales, à partir de l'extrémité C du diamètre sur lequel est portée la distance $AB=x$, on commence cette division (*fig.* 28) à partir du point 0, après avoir porté l'arc $C0=\frac{g}{n}$. Ainsi, en désignant toujours par y_0, y_1, y_2, y_3, etc., les lignes B0, B1, B2, B3, etc., on a également

$$x^{2n}-2\cos. g. x^n+1=y_0.y_2.y_4.y_6\ldots\ldots y_{2n-2}$$
$$x^{2n}+2\cos. g. x^n+1=y_1.y_3.y_5.y_7\ldots\ldots y_{2n-1}.$$

Cette dernière proposition, dont la précédente n'est qu'un cas particulier, a été donnée par Moivre.

Remarques sur les expressions imaginaires. Expressions générales des logarithmes et des sinus et cosinus.

127. Les propriétés des expressions imaginaires sont uniquement fondées sur les notions exposées dans les nos 111 et 112, et sur l'identité des expressions $e^{x\sqrt{-1}}$ et $\cos. x+\sqrt{-1}\sin. x$ qui a été remarquée dans le n° 113, et qui conduit immédiatement à la formule de Moivre donnée n° 117. Nous nous bornerons ici aux remarques les plus simples sur ce sujet.

Les propriétés principales des fonctions simples x^m, $\log. x$, a^x, $\sin. x$ ou $\cos. x$, subsistent également lorsqu'on donne à la variable x une valeur imaginaire.

La nature de la fonction x^m consiste en ce que l'on a $x^m x^n=x^{m+n}$. Or, en posant

$$x=s(\cos. t+\sqrt{-1}\sin t),$$

on a

$$x^m = s^m(\cos.t+\sqrt{-1}\sin.t)^m = s^m(\cos.mt+\sqrt{-1}\sin.mt)$$
$$x^n = s^n(\cos.t+\sqrt{-1}\sin.t)^n = s^n(\cos.nt+\sqrt{-1}\sin.nt)$$

et par conséquent

$$x^m x^n = s^{m+n}(\cos.(m+n)t+\sqrt{-1}\sin.(m+n)t) = x^{m+n}.$$

128. La fonction a^x doit également donner $a^x a^y = a^{x+y}$. D'ailleurs on peut toujours considérer à la place de a^x la fonction e^x; car posant $a^x = e^v$, et prenant de part et d'autre les logarithmes népériens, il vient $xla = v$; en sorte qu'il suffit de multiplier x par la pour changer a^x en e^x. Mais en faisant $x = m+n\sqrt{-1}$, et $y = p+q\sqrt{-1}$, nous avons

$$e^x = e^{m+n\sqrt{-1}} = e^m.e^{n\sqrt{-1}} = e^m(\cos.n+\sqrt{-1}\sin.n)$$
$$e^y = e^{p+q\sqrt{-1}} = e^p.e^{q\sqrt{-1}} = e^p(\cos.q+\sqrt{-1}\sin.q).$$

Donc

$$e^x.e^y = e^{m+p}(\cos.(n+q)+\sqrt{-1}\sin.(n+q)) = e^{x+y}.$$

Observons d'ailleurs que la transformation de a^x en e^x, opérée en multipliant x par la, suppose que la soit un nombre qui puisse être assigné, c'est-à-dire que a soit un nombre réel et positif. La propriété de la fonction a^x dont il s'agit ne subsiste pas sans restriction, lorsqu'on veut attribuer au nombre a des valeurs négatives ou imaginaires.

129. La nature des logarithmes consiste en ce que l'on a toujours $\log.xy = \log.x+\log.y$. Cette équation subsistera également en donnant aux variables x, y des valeurs quelconques réelles ou imaginaires, pourvu que la base a du système de logarithmes soit toujours un

nombre réel et positif, conformément à ce qui a été dit n° 64. En effet, nous pouvons considérer lx à la place de log. x, puisque, d'après le n° 104, il suffit de multiplier log. x par la pour le changer en lx. Or, en posant $x=s$ (cos. $t+\sqrt{-1}$ sin. t), $y=u$ (cos. $v+\sqrt{-1}$sin. v), et se rappelant que, d'après le n° 113, $e^{t\sqrt{-1}}=$ cos. $t+\sqrt{-1}$ sin. t, d'où $t\sqrt{-1}=l$(cos. $t+\sqrt{-1}$ sin. t), nous aurons

$$lx=ls+t\sqrt{-1}$$
$$ly=lu+v\sqrt{-1},$$

d'où

$$lx+ly=l.su+(t+v)\sqrt{-1}=l.xy.$$

130. Remarquons d'ailleurs qu'en multipliant par h les deux membres de l'équation $e^{x\sqrt{-1}}=$ cos. $x+\sqrt{-1}$ sin. x, h désignant un nombre réel quelconque, puis, prenant les logarithmes népériens des deux membres, nous avons

$$lh+x\sqrt{-1}=l[h(\text{cos.}\,x+\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,x)].$$

Or, l'expression h (cos. $x+\sqrt{-1}$ sin. x) peut, d'après le n° 112, représenter un nombre imaginaire quelconque $m+n\sqrt{-1}$; d'où l'on conclut que l'équation précédente donne l'expression générale du logarithme népérien des nombres imaginaires. Ce logarithme est égal au logarithme népérien du module h, auquel est ajouté le terme $x\sqrt{-1}$.

De plus, l'expression h (cos. $x+\sqrt{-1}$ sin. x) représentera également un nombre réel quelconque positif

lorsqu'on y supposera l'arc $x=2i\pi$, i désignant un nombre entier ; et un nombre réel quelconque négatif lorsqu'on y supposera $x=(2i+1)\pi$. On a donc respectivement

$$lh+2i\pi\sqrt{-1}$$
$$lh+(2i+1)\pi\sqrt{-1}$$

pour les expressions générales des logarithmes népériens du nombre positif h, et du nombre négatif $-h$. Ces expressions doivent être admises, parce qu'elles satisfont aux équations $e^{lx}=x$, et $lx+ly=l.xy$ qui résultent immédiatement de la définition de la fonction logarithmique. On voit que le logarithme de tout nombre positif a une seule valeur réelle qui répond à $i=o$, mais que le logarithme d'un nombre négatif a toutes ses valeurs imaginaires.

131. L'expression précédente du logarithme d'un nombre résulte d'ailleurs de l'équation

$$lz=r\left[z^{\frac{1}{r}}-1-\frac{1}{2}\left(z^{\frac{1}{r}}-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(z^{\frac{1}{r}}-1\right)^3-\text{etc.}\right]$$

qui a été donnée n° 103. En effet, si l'on suppose le nombre r infiniment grand, cette équation se réduit à

$$lz=r\left(z^{\frac{1}{r}}-1\right).$$

Or, on doit, pour lui conserver toute sa généralité, y concevoir conformément au n° 122, $z^{\frac{1}{r}}$ comme représentant le produit de la racine arithmétique $\sqrt[r]{z}$ par les r racines de l'unité. On doit donc écrire, avec la condition de faire r infiniment grand,

$$lz = r\left[\sqrt[r]{z}\left(\cos.\frac{2i\pi}{r} + \sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{r}\right) - 1\right],$$

ou

$$lz = r\left(\sqrt[r]{z}.\cos.\frac{2i\pi}{r} - 1\right) + \sqrt{-1}.\sqrt[r]{z}.r\sin.\frac{2i\pi}{r}.$$

Mais r étant infiniment grand, on peut remplacer dans le premier terme du second membre $\cos.\frac{2i\pi}{r}$ par l'unité ; et dans le second terme $\sqrt[r]{z}$ par l'unité, $r\sin.\frac{2i\pi}{r}$ par $2i\pi$. Ce second membre se réduit donc à

$$r(\sqrt[r]{z} - 1) + 2i\pi\sqrt{-1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad lz + 2i\pi\sqrt{-1}.$$

S'il s'agissait d'un nombre négatif, on verrait de la même manière que les racines $r^{ièmes}$ de $-z$ étant exprimées généralement, d'après le n° 122, par $\sqrt[r]{z}\left(\cos.\frac{(2i+1)\pi}{r} + \sqrt{-1}\sin.\frac{(2i+1)\pi}{r}\right)$, l'équation précédente donne pour l'expression de $l(-z)$

$$lz + (2i+1)\pi\sqrt{-1}.$$

132. En faisant $i=0$ dans l'équation $l(-1)=(2i+1)\pi\sqrt{-1}$, on trouve $\pi = \frac{l(-1)}{\sqrt{-1}}$, expression singulière du nombre π qui a été donnée par Jean Bernouilli. On a d'ailleurs plus généralement $\pi = \frac{l(-1)}{(2i+1)\sqrt{-1}}$, Les équations de cette nature sont des conséquences immédiates de la relation qui existe entre les dévelop pements des fonctions e^x, sin. x et cos. x, et s'inter prètent sans difficulté d'après cette remarque.

133. On reconnaît également que les propriétés essentielles des fonctions trigonométriques sin. x et cos. x, qui sont exprimées par les équations

$$\sin.(x+y)=\sin.x\cos.y+\sin.y\cos.x$$
$$\cos.(x+y)=\cos.x\cos.y-\sin.x\sin.y,$$

conviennent également aux cas où les variables x et y sont supposées imaginaires et remplacées respectivement par les expressions $m+n\sqrt{-1}$ et $p+q\sqrt{-1}$. Il suffit, pour en être assuré, de se rappeler les remarques qui ont été faites dans les nos 114 et 116.

134. Si l'on veut d'ailleurs connaître les expressions générales du sinus et du cosinus d'un arc quelconque réel ou imaginaire, on remarquera que

$$\cos.(m+n\sqrt{-1})=\cos.m.\cos.n\sqrt{-1}-\sin.m.\sin.n\sqrt{-1}$$
$$\sin.(m+n\sqrt{-1})=\sin.m.\cos.n\sqrt{-1}+\cos.m.\sin.n\sqrt{-1}$$

Mais les expressions de cos. x et sin. x en exponentielles qui ont été données n° 113, et qui conviennent, d'après le n° 116, au cas où l'on attribuerait à x la valeur imaginaire $n\sqrt{-1}$, donnent

$$\cos.n\sqrt{-1}=\frac{e^{-n}+e^{n}}{2},\quad \sin.n\sqrt{-1}=\frac{e^{-n}-e^{n}}{2\sqrt{-1}}.$$

Donc

$$\cos.(m+n\sqrt{-1})=\frac{e^{-n}+e^{n}}{2}\cos.m-\sqrt{-1}.\frac{e^{-n}-e^{n}}{2}\sin.m$$
$$\sin.(m+n\sqrt{-1})=\frac{e^{-n}+e^{n}}{2}\sin.m+\sqrt{-1}.\frac{e^{-n}-e^{n}}{2}\cos.m.$$

135. On ne donnera pas ici plus d'étendue à ces notions, et l'on ajoutera seulement que toutes les relations

analytiques qui peuvent être établies entre les quantités réelles et imaginaires ne doivent être admises qu'autant qu'elles peuvent être justifiées et interprétées au moyen des équations fondamentales qui ont été données au commencement de cet article, et qui reposent elles-mêmes sur l'identité des développements en séries toujours convergentes des expressions $e^{x\sqrt{-1}}$ et $\cos. x+\sqrt{-1} \sin. x$.

On a vu d'ailleurs par les remarques précédentes que les fonctions simples de la quantité imaginaire $m+n\sqrt{-1}$ se transformaient toutes dans des expressions de la forme $P+Q\sqrt{-1}$. On en conclura que la même chose doit arriver pour les fonctions composées de celles-ci. Il en est de même à l'égard des fonctions inverses, telles que arc sin. x ou arc cos. x; et en général on admet que toute fonction formée de quantités imaginaires peut se ramener à la forme $P+Q\sqrt{-1}$, P et Q désignant des quantités réelles.

Expressions des puissances du cosinus et du sinus d'un arc en fonction des cosinus ou des sinus des arcs multiples.

136. Les géomètres ont donné plusieurs séries au moyen desquelles les cosinus ou sinus des arcs multiples sont exprimés en fonction des puissances du cosinus et du sinus de l'arc simple, et réciproquement. La discussion et l'interprétation exacte de ces formules exigent l'application des notions qui ont été présentées n°s 111 et suivants, et l'on peut voir sur ce sujet les *Leçons sur le calcul des fonctions* de Lagrange (10 et 11e leçon), et l'ouvrage de M. Poinsot intitulé, *Recherches sur l'a-*

nalyse des sections angulaires. On se bornera à présenter ici les expressions suivantes, dont l'usage est utile dans le calcul intégral, en se bornant même au cas des puissances entières et positives du sinus et du cosinus.

Soit fait

$$\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x=u,\quad \text{d'où}\quad 2\cos.x=u+v$$
$$\cos.x-\sqrt{-1}\sin.x=v\qquad\qquad 2\sqrt{-1}\sin.x=u-v.$$

En développant la puissance m de $u+v$ par le binôme de Newton, et supposant d'abord que m soit un nombre entier positif, on a donc

$$(2\cos.x)^m=u^m+mu^{m-1}v+\frac{m(m-1)}{2}u^{m-2}v^2+\ldots\ldots+v^m;$$

ou en remarquant que $uv=1$,

$$(2\cos.x)^m=u^m+mu^{m-2}+\frac{m(m-1)}{2}u^{m-4}+\ldots\ldots\ldots+v^m.$$

Comme on a d'ailleurs généralement par le théorème de Moivre, n° 117, $u^m=\cos.mx+\sqrt{-1}\sin.mx$, cette équation peut s'écrire

$$(2\cos.x)^m=\cos.mx+m\cos.(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\cos.(m-4)x+\ldots+\cos.mx$$
$$+\sqrt{-1}\left(\sin.mx+m\sin.(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\sin.(m-4)x+\ldots-\sin.mx\right).$$

La suite qui forme la première ligne présente des termes qui sont tous égaux deux à deux, à l'exception d'un seul, dans le cas où m est pair. Quant à la suite qui forme la seconde ligne elle est toujours formée de termes qui se

détruisent réciproquement. Ainsi l'on a simplement dans le cas dont il s'agit; 1° si l'exposant m est pair

$$\text{os.}\, x)^m = 2\left[\cos.\, mx + m\cos.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos.(m-4)x + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m}{2}}{2.3\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}\cos.\, 2x\right] + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2.3.4\ldots\ldots\frac{m}{2}}.$$

2° si l'exposant est impair

$$\text{os.}\, x)^m = 2\left[\cos.\, mx + m\cos.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos.(m-4)x + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\frac{m-3}{2}}{2.3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\cos.\, x\right].$$

137. Une analyse semblable donnera l'expression des puissances du sinus. En développant la puissance m de $u-v$ dans le cas de m entier et positif, on a

$$(\sqrt{-1}.2\sin.\, x)^m = u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{2}u^{m-2}v^2 - \ldots \pm v^m$$

ou parce que $uv=1$,

$$(\sqrt{-1}.2\sin.\, x)^m = u^m - mu^{m-2} + \frac{m(m-1)}{2}u^{m-4} - \ldots\ldots \pm v^m.$$

Les signes + ou — ont lieu respectivement lorsque m est pair ou impair. Mettant ensuite pour u^m l'expression $\cos.\, mx + \sqrt{-1}\,\sin.\, mx$, il vient

$$(\sqrt{-1}.2\sin.x)^m = \cos.mx - \cos.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos.(m-4 \\ - \ldots \pm \cos.mx \\ + \sqrt{-1}\Big(\sin.mx - m\sin.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\sin.(m- \\ - \ldots \pm \sin.mx\Big).$$

1° Si l'exposant m est pair la seconde ligne se réduit à zéro, et l'on a

$$(-1)^{\frac{m}{2}}(2\sin.x)^m = 2\left[\cos.mx - m\cos.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos.(m-4)x - \ldots \right. \\ \left. \pm \frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m}{2}}{2.3\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}\cos.2x\right] \mp \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2.3.4\ldots\ldots\frac{m}{2}}.$$

Les signes supérieur et inférieur ont lieu respectivement lorsque m est un multiple de 4 ou un multiple de 2.

2° Si l'exposant m est impair, la seconde ligne se réduit à zéro, et l'on a

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}(2\sin.x)^m = 2\left[\sin.mx - m\sin.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\sin.(m-4)x - \ldots \right. \\ \left. \pm \frac{m(m-1)\ldots\frac{m-3}{2}}{2.3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\cos.x\right].$$

Les signes supérieur et inférieur ont lieu respectivement lorsque m est un multiple de 4 ou un multiple de 2 augmentés de l'unité.

XIII. EXTENSION DE LA FORMULE DE TAYLOR AUX FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

138. Considérons la fonction

$$z=f(x,y),$$

dans laquelle x et y représentent deux variables indépendantes. On suppose que ces variables prennent respectivement les valeurs $x+h$, $y+i$, et il s'agit d'obtenir le développement de la valeur que prendra la fonction, c'est-à-dire de $f(x+h,\ y+i)$, ordonné suivant les puissances des quantités h et i. Pour y parvenir, on posera $h=\alpha\xi$ et $i=\alpha\eta$, et considérant la quantité $f(x+\alpha\xi,\ y+\alpha\eta)$ comme une fonction du nombre quelconque α, on écrira

$$\mathrm{F}(\alpha)=f(x+\alpha\xi,\ y+\alpha\eta).$$

Or, on peut développer $\mathrm{F}(\alpha)$ suivant les puissances de α au moyen du théorème donné au n° 86. Nous prendrons donc successivement les coefficients différentiels des divers ordres de $\mathrm{F}(\alpha)$, qui seront exprimés ainsi qu'il est aisé de le reconnaître, par

$$\mathrm{F}'(\alpha)=\frac{df}{dx}\xi+\frac{df}{dy}\eta,$$

$$\mathrm{F}''(\alpha)=\frac{d^2f}{dx^2}\xi^2+2\frac{d^2f}{dxdy}\xi\eta+\frac{d^2f}{dy^2}\eta^2,$$

$$\mathrm{F}'''(\alpha)=\frac{d^3f}{dx^3}\xi^3+3\frac{d^3f}{dx^2dy}\xi^2\eta+3\frac{d^3f}{dxdy^2}\xi\eta^2+\frac{d^3f}{dx^3}\eta^3,$$

etc.

en écrivant pour abréger, f au lieu de $f(x+\alpha\xi,\ y+\alpha\eta)$. Puis nous ferons dans les valeurs de ces coefficients $\alpha=0$, ce qui donnera

$$F'(0) = \frac{dz}{dx}\xi + \frac{dz}{dy}\eta$$

$$F''(0) = \frac{d^2z}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2z}{dy^2}\eta^2$$

$$F'''(0) = \frac{d^3z}{dx^3}\xi^3 + 3\frac{d^3z}{dx^2dy}\xi^2\eta + \frac{d^3z}{dxdy^2}\xi^2\eta + \frac{d^3z}{d^3y}\eta^3$$

etc.

Nous aurons donc en appliquant la règle du numéro cité,

$$F(\alpha) = z + \left.\begin{array}{l} \frac{dz}{dx}\xi \\ + \frac{dz}{dy}\eta \end{array}\right| \alpha + \left.\begin{array}{l} \frac{d^2z}{dx^2}\xi^2 \\ + 2\frac{d^2z}{dxdy}\xi\eta \\ + \frac{d^2z}{dy^2}\eta^2 \end{array}\right| \frac{\alpha^2}{2} + \left.\begin{array}{l} \frac{dz^3}{dx^3}\xi^3 \\ + 3\frac{d^3z}{dx^2dy}\xi^2\eta \\ + 3\frac{d^3z}{dxdy^2}\xi\eta^2 \\ + \frac{d^3z}{dy^3}\eta^3 \end{array}\right| \frac{\alpha^3}{2.3} + \text{etc.},$$

ou, en remplaçant $\alpha\xi$ par h et $\alpha\eta$ par i,

$$\begin{aligned} f(x+h, y+i) = z &+ \frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \frac{d^4z}{dx^4}\frac{h^4}{2.3.4} + \text{etc}, \\ &+ \frac{dz}{dy}i + \frac{d^2z}{dxdy}hi + \frac{d^3z}{dx^2dy}\frac{h^2i}{2} + \frac{d^4z}{dx^3dy}\frac{h^3i}{2.3} \\ &+ \frac{d^2z}{dy^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3z}{dxdy^2}\frac{hi^2}{2} + \frac{d^4z}{dx^2dy^2}\frac{h^2i^2}{2.2} \\ &+ \frac{d^3z}{dy^3}\frac{i^3}{2.3} + \frac{d^4z}{dxdy^3}\frac{hi^3}{2.3} \\ &+ \frac{d^4z}{dy^4}\frac{i^4}{2.3.4} \end{aligned}$$

développement dont la loi est évidente. Le second terme est la différentielle complète du premier ordre de la fonction z, où l'on a écrit h à la place de dx et i à la place

de dy. Le troisième terme est sa différentielle du second ordre, où l'on a fait les mêmes changements, divisée par 2. Le quatrième terme est sa différentielle complète du troisième ordre, où l'on a fait les mêmes changements, divisée par 2.3; et ainsi de suite.

Les notions précédentes s'étendront sans difficulté aux cas où la fonction proposée contiendrait plus de deux variables indépendantes, et où l'on supposerait que ces diverses variables subissent toutes des accroissements. Les termes successifs du développement sont toujours les différentielles complètes du 1er, 2e, 3e, 4e, etc., ordres de la fonction proposée, où l'on a remplacé la différentielle de chaque variable par la quantité dont on la suppose augmentée, et qui sont divisés respectivement par 1,2, 2.3,2.3.4, etc.

139. La formule précédente donne également le développement de la fonction $z=f(x,y)$ suivant la puissance de x et y. En y faisant $x=0$ et $y=0$; puis écrivant x à la place de h, et y à la place de i, il vient

$$
\begin{aligned}
f(x,y)=z_0+\frac{dz_0}{dz}x+\frac{d^2z_0}{dx^2}\frac{x^2}{2}+\frac{d^3z_0}{dx^3}\frac{x^3}{2.3}&+\text{etc.},\\
+\frac{dz_0}{dy}y+\frac{d^2z_0}{dxdy}xy+\frac{d^3z}{dx^2dy}\frac{x^2y}{2}&\\
+\frac{d^2z_0}{dy^2}\frac{y^2}{2}+\frac{d^3z_0}{dxdy^2}\frac{xy^2}{2}&\\
+\frac{d^3z_0}{dy^3}\frac{y^3}{2.3}&
\end{aligned}
$$

où nous représentons par $z_0, \frac{dz_0}{dx}, \frac{dz_0}{dy}, \frac{d^2z_0}{dx^2}$, etc., les valeurs que prennent respectivement les fonctions $z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{d^2x}$,

etc., lorsqu'on y fait en même temps $x=0$ et $y=0$.

Il en serait de même si le nombre des variables indépendantes était plus considerable.

140. Si l'on veut arrêter la série à un terme déterminé, et connaître les limites de la valeur du reste que l'on néglige, comme on l'a fait dans les numéros 84 et suivants à l'égard des fonctions d'une seule variable, il est visible, par les principes établis dans ces numéros, que dans le développement de $F(\alpha)$ l'on devrait dans le terme auquel l'on veut s'arrêter, remplacer α par $\theta\alpha$, au lieu de faire $\alpha=0$; et par conséquent dans le développement de $f(x+h, y+i)$ remplacer x par $x+\theta h$, et y par θi, en désignant toujours par θ un nombre indéterminé compris entre zéro et l'unité. On connaîtra ensuite les limites cherchées en attribuant, dans le terme dont il s'agit, à θ les valeurs qui le rendent le plus grand ou le moindre possible.

Par exemple, si dans le cas de la fonction de deux variables $z=f(x,y)$ on s'arrête aux termes du 3[e] ordre, on aura

$$\begin{aligned} f(x+h,y+i)=z &+ \frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3f(x+\theta h,y+\theta i)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} \\ &+ \frac{dz}{dy}i + \frac{d^2z}{dxdy}hi + \frac{d^3f(x+\theta h,y+\theta i)}{dx^2dy}\frac{h^2i}{2} \\ &+ \frac{d^2z}{dy^2}\frac{i^2}{2} + \frac{d^3f(x+\theta h,y+\theta i)}{dxdy^2}\frac{hi^2}{2} \\ &+ \frac{d^3f(x+\theta h,y+\theta i)}{dy^3}\frac{i^3}{2.3} \end{aligned}$$

141. Il en serait de même à l'égard du cas où la fonction est développée suivant les puissances ascendantes

des deux variables x, y. Si l'on s'arrête aux termes du 3e ordre, et si l'on pose $\theta x = x'$, $\theta y = y'$, on aura évidemment

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = z_0 \frac{dz_0}{dx} x + \frac{d^2 z_0}{dx^2}\frac{x^2}{2} &+ \frac{d^3 f(x',y')}{dx'^3}\frac{x^3}{2.3} \\
+ \frac{dz_0}{dy} y + \frac{d^2 z_0}{dy\,dx} xy &+ \frac{d^3 f(x',y')}{dx'^2 dy'}\frac{x^2 y}{2} \\
+ \frac{d^2 z_0}{dy^2}\frac{y^2}{2} &+ \frac{d^3 f(x',y')}{dx' dy'^2}\frac{xy^2}{2} \\
&+ \frac{d^3 f(x',y')}{dy'^3}\frac{y^3}{2.3}.
\end{aligned}
$$

En attribuant à θ les valeurs qui rendent l'expression du reste le plus grand et le moindre possible, on aura deux limites entre lesquelles la valeur véritable du développement se trouve nécessairement comprise.

XIV. MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS D'UNE OU DE PLUSIEURS VARIABLES.

142. Considérons en premier lieu une fonction réelle d'une seule variable

$$y = f(x),$$

et représentons-nous l'ensemble des valeurs que prend cette fonction lorsqu'on donne à x toutes les valeurs possibles depuis $-\frac{1}{0}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$. Si les valeurs de la fonction y après avoir été croissantes deviennent décroissantes, la plus grande de ces valeurs est dite un *maximum*; et réciproquement si ces même valeurs, qui diminuaient progressivement, viennent ensuite à augmenter progressivement, la plus petite est dite un *minimum*. On voit qu'il est possible qu'une fonction n'ait point de maximum

ni de minimum, ou qu'elle en ait plusieurs. La question consiste à déterminer les valeurs de la variable indépendante x, s'il en existe qui répondent aux maxima ou aux minima de la fonction.

Si la valeur a de x répondait à un maximum de la fonction réelle $f(x)$, il est visible que $f(a)$ serait plus grande que $f(a+h)$ et $f(a-h)$, h étant une quantité moindre que toute grandeur donnée. De même si la valeur a répondait à un minimum, $f(a)$ serait plus petite que $f(a+h)$ et $f(a-h)$. D'après cette remarque, la question dont il s'agit peut être facilement résolue.

En développant $f(x+h)$ par la formule de Taylor on a généralement

$$f(x+h)=f(x)+\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3.f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\frac{d^4.f(x)}{dx^4}\frac{h^4}{2.3.4}+\text{e}$$

et d'après les principes expliqués dans les nos 83 et suivants, nous pouvons arrêter cette série à un terme quelconque, en substituant aux termes omis une expression dont la valeur est comprise entre des limites qu'il est toujours facile d'assigner. Admettons en premier lieu que l'on s'arrête aux termes du second ordre, et écrivons

$$f(x+h)=f(x)+\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\frac{h^2}{2},$$

θ désignant un nombre compris entre zéro et $+1$. Il s'agit de reconnaître les conditions nécessaires pour que $f(a)$ soit plus grande que $f(a\pm h)$, h pouvant être supposée aussi petite qu'on le veut. Or il est visible qu'en prenant h aussi petite qu'on le voudra, on pourra toujours faire dépendre le signe de la somme des deux

termes $\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\frac{h^2}{2}$ du signe du premier terme seul $\frac{d.f(x)}{dx}h$, puisque $\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\frac{h}{2}$ pourra toujours être rendue plus petite que $\frac{d.f(x)}{dx}$. D'où l'on conclut, 1° que $f(a)$ ne peut être plus grande que $f(a+h)$, quel que soit le signe de h, à moins que $\frac{d.f(a)}{dx}$ ne soit nul et que $\frac{d^2.f(a)}{dx^2}$ ne soit affecté du signe $-$; 2° que $f(a)$ ne peut être plus petite que $f(a+h)$, quel que soit le signe h, à moins que $\frac{d.f(a)}{dx}$ ne soit nul, et que $\frac{d^2.f(a)}{dx^2}$ ne soit affecté du signe $+$.

Ainsi, pour qu'il y ait maximum ou minimum lorsqu'on fait $x=a$, il est nécessaire que cette valeur a rende nul le coefficient différentiel du premier ordre ; et il y aura maximum ou minimum suivant que cette même valeur donnera le signe — ou le signe + au coefficient différentiel du second ordre.

143. Il pourrait arriver d'ailleurs que la valeur dont il s'agit rendît nuls les coefficients différentiels des deux premiers ordres. Dans ce cas il est nécessaire de considérer les termes suivants du développement et d'écrire

$$f(x+h)=f(x)+\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3.f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\frac{d^4.f(x+\theta h)}{dx^4}\frac{h^4}{2.3.4}.$$

Le même raisonnement qui a été fait ci-dessus montrera que si les termes $\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}$ disparaissent

lorsqu'on fait $x=a$, la valeur a ne peut répondre à un maximum ou à un minimum qu'autant qu'elle fera disparaître également le terme $\frac{d^3.f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}$; et qu'il y aura maximum ou minimum suivant que pour cette même valeur le coefficient différentiel du 4ᵉ ordre $\frac{d^4.f(x)}{dx^4}$ sera négatif ou positif.

En général, il ne peut y avoir maximum ou minimum pour une valeur donnée de x qu'autant que le premier coefficient différentiel que cette valeur ne rend pas nul est d'un ordre pair ; et il y a maximum ou minimum suivant que ce coefficient différentiel prendra le signe — ou le signe +.

144. Il pourrait arriver encore que la valeur a de x, déterminée par l'équation $\frac{dy}{dx}=0$, rendît infinis le coefficient différentiel du second ordre et les suivants. On serait averti par-là, conformément à ce qui a été dit dans le nº 88 et les suivants, que la formule de Taylor ne peut exprimer la valeur de la fonction en série ordonnée suivant les puissances entières de h. Les règles précédentes ne peuvent donc plus s'appliquer. On doit examiner d'une manière spéciale la marche des valeurs de la fonction, ce que l'on fera facilement en la développant suivant les puissances fractionnaires ou négatives de h après avoir fait $x=a$. Il faut observer aussi que l'analyse précédente exclut implicitement les *maxima* et *minima* correspondant à une valeur de x, pour laquelle la dérivée $\frac{dy}{dx}$ serait infinie ou discontinue.

145. Les notions précédentes deviennent bien sensibles en considérant les courbes dont l'ordonnée y représente les valeurs de $f(x)$, et en admettant, pour fixer les idées, que les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ sont continues. Il est évident en effet qu'il ne peut y avoir maximum ou minimum que dans des points m, n, p, q, r, s (*fig.* 29), où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, et où l'on a $\frac{dy}{dx}=0$. De plus il y a maximum en m et en p lorsque, la courbe présentant sa concavité au bas de la page, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif; et il y a minimum en n et en q lorsque, la courbe présentant sa convexité au bas de la page, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif. Les quantités négatives sont ici regardées comme étant d'autant plus petites que leur valeur absolue est plus grande.

On reconnaît également que la condition $\frac{dy}{dx}=0$ n'entraîne pas nécessairement l'existence du maximum ou minimum, parce qu'il y a des points pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des x, sans que la fonction ait cessé de croître ou de décroître. Mais ces points sont généralement des points d'inflexion, dans lesquels change le sens de la concavité de la courbe, et où le coefficient différentiel du second ordre devant changer de signe prend la valeur zéro. Nous reviendrons dans la suite sur les caractères analytiques qui appartiennent aux divers *points singuliers* que les courbes peuvent présenter.

146. On voit donc, d'après ce qui précède, que pour

trouver les maxima et minima de la fonction proposée $y=f(x)$, en excluant ceux qui rendent infinie ou discontinue la dérivée $f'(x)$, il faut poser l'équation

$$\frac{dy}{dx}=0,$$

qui, étant résolue par rapport à x, donnera les valeurs demandées. On jugera si ces valeurs répondent à un maximum ou à un minimum en les substituant dans le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$, et voyant le signe qu'elles lui font prendre. Si ce coefficient différentiel devenait nul, on passerait aux suivants, conformément à ce qui a été dit ci-dessus.

Si la fonction y n'était donnée que d'une manière implicite, au moyen d'une équation $F(x,y)=0$, on égalerait de même à zéro son coefficient différentiel, déterminé conformément à ce qui a été dit dans le numéro 44. L'équation $\frac{dy}{dx}=0$ contiendrait alors x et y : mais en éliminant y entre cette équation et $F(x,y)=0$, il resterait une seule équation en x qui donnerait les valeurs cherchées.

147. Les mêmes principes s'appliqueront aux fonctions de deux variables. Mais, pour plus de simplicité, nous supposerons toujours que le théorème de Taylor convient au développement de ces fonctions, ce qui arrive dans la plupart des applications du calcul différentiel. Soit

$$z=f(x,y).$$

En développant $f(x+h, y+i)$ d'après ce qu'on a vu dans l'article précédent, on aura

$$f(x+h,y+i)=z+\frac{dz}{dx}h+\frac{d^2f(x+\theta h,y+\theta i)}{dx^2}\frac{h^2}{2}$$
$$+\frac{dz}{dy}i+\frac{d^2f(x+\theta h,y+\theta i)}{dxdy}hi$$
$$+\frac{d^2f(x+\theta h,y+\theta i)}{dy^2}\frac{i^2}{2}$$

θ désignant une fraction. Or en prenant h et i suffisamment petits, on rendra toujours le deuxième terme $\frac{dz}{dx}h+\frac{dz}{dy}i$ plus grand que le troisième terme, et par conséquent le signe de leur somme dépendra du signe du deuxième terme seul. Donc pour que les valeurs $x=a, y=b$ répondent à un maximum ou à un minimum de la fonction z, ce qui exige que $f(a, b)$ soit plus grande ou plus petite que $f(a\pm h, b\pm i)$, il est nécessaire que le terme $\frac{dz}{dx}h+\frac{dz}{dy}i$ soit nul; et par conséquent puisque les quantités h et i sont absolument indépendantes l'une de l'autre, que l'on ait séparément $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=0$. De plus il faut qu'en donnant une valeur quelconque aussi petite que l'on voudra aux accroissements h et i la quantité $\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^2z}{dxdy}hi+\frac{d^2z}{dy^2}\frac{i^2}{2}$ soit toujours négative pour le maximum et toujours positive pour le minimum. Supposons d'abord que l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{i^2}+2\frac{d^2z}{dxdy}\frac{h}{i}+\frac{d^2z}{dy^2}=0$$

résolue par rapport à l'indéterminée $\frac{h}{i}$ n'ait que des racines imaginaires, c'est-à-dire que l'on ait $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 < \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2}$, condition qui ne peut être satisfaite que si $\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ sont de même signe. Alors la quantité $\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^2z}{dxdy} \cdot hi + \frac{d^2z}{dy^2} i^2$ ne pourra jamais ni devenir nulle, ni changer de signe : elle conservera constamment le signe de son premier terme ou de $\frac{d^2z}{dx^2}$. Donc il y aura maximum si le coefficient $\frac{d^2z}{dx^2}$ est négatif, minimum s'il est positif.

Si l'on avait au contraire

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 < \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2},$$

les racines de l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{i^2} + 2\frac{d^2z}{dxdy} \cdot \frac{h}{i} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

deviendraient réelles et inégales : par suite la quantité

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^2z}{dxdy} \cdot hi + \frac{d^2z}{dy^2} \cdot \frac{i^2}{2}$$

serait tantôt positive, tantôt négative. Il n'y aurait donc ni maximum ni minimum.

Mais le cas particulier où

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2}$$

mérite d'être examiné à part. Alors l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{i^2}+2\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{h}{i}+\frac{d^2z}{dy^2}=0$$

a ses deux racines égales, et en représentant par m le rapport de $\frac{d^2z}{dxdy}$ à $\frac{d^2z}{dx^2}$, il vient

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{d^2z}{dxdy}\cdot hi+\frac{d^2z}{dy^2}\cdot i^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}(h+mi)^2.$$

Donc la quantité

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{d^2z}{dxdy}\cdot hi+\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{i^2}{2}$$

est généralement de même signe que $\frac{d^2z}{dx^2}$, et elle ne devient nulle que quand $h=-mi$. Il y aura alors maximum ou minimum, si l'hypothèse $h=-mi$ réduit à zéro l'ensemble des termes du troisième ordre et rend de même signe que $\frac{d^2z}{dx^2}$ l'ensemble des termes du quatrième ordre. Le maximum répondra d'ailleurs aux valeurs négatives et le minimum aux valeurs positives de $\frac{d^2z}{dx^2}$.

148. Si les valeurs a et b qui rendent nuls les termes du premier ordre faisaient également disparaître les termes du second ordre, il est visible qu'elles ne répondraient à un maximum ou à un minimum qu'autant qu'elles feraient également disparaître les termes du troisième ordre en laissant subsister ceux du quatrième. De

plus il faudrait que la somme de ces termes du quatrième ordre conservât constamment le signe — pour qu'il y eût maximum, et qu'elle conservât constamment le signe + pour qu'il y eût minimum. Et ainsi de suite.

149. Les résultats précédents deviennent sensibles lorsqu'on regarde la fonction z comme l'ordonnée d'une surface, dont x et y sont les abscisses. Quand la fonction z et ses dérivées sont continues, on reconnaît en effet sur-le-champ qu'il ne peut y avoir maximum ou minimum en un point donné d'une surface qu'autant que les tangentes aux deux intersections de la surface faites en ce point par des parallèles aux plans des xz et des yz, sont parallèles au plan des xy, en sorte que le plan qui touche la surface au point dont il s'agit est lui-même parallèle au plan des xy. Cette première condition donne les équations $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=0$. De plus il faut que les deux courbes d'intersection dont on vient de parler présentent leur concavité du même côté, ce qui exige que les coefficients différentiels $\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ soient de même signe. Mais cette dernière condition ne suffirait pas seule en général, pour assurer l'existence du maximum ou du minimum. Il faut y joindre celles que nous avons données plus haut.

150. On trouverait d'une manière semblable les conditions du maximum ou du minimum, si le nombre des variables était plus considérable. Soit par exemple la fonction

$$z=f(v, x, y).$$

On aura

$$\ldots, x+h, y+i) = z + \frac{dz}{dv}g + \frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}i$$

$$+ \frac{d^2z}{dv^2}\frac{g^2}{2} + \frac{d^2z}{dvdx}gh + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2z}{dvdy}gi + \frac{d^2z}{dxdy}hi + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{i^2}{2}$$

$$+ \text{etc.}$$

et l'on pourra toujours, en rendant g, h, i suffisamment petits, faire dépendre le signe de tous les termes qui suivent le second ou le troisième du signe seul de ceux-ci. Ainsi les valeurs des variables v, x, y qui répondront à un maximum ou à un minimum de la fonction z doivent d'abord satisfaire aux trois équations

$$\frac{dz}{dv} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0.$$

De plus il est nécessaire qu'en donnant à v, x, y ces mêmes valeurs la somme des termes du second ordre, que nous représenterons pour abréger par

$$Ag^2 + 2Bgh + Ch^2 + 2Dgi + 2Ehi + Fi^2,$$

ne change pas de signe, quelles que soient les valeurs supposées aussi petites que l'on voudra, que l'on attribue à g, h, i. Cela exige en premier lieu que A, C et F soient de même signe. Mais à cette première condition viennent s'en joindre d'autres que l'on découvrira aisément par la méthode du n° 147, c'est-à-dire en étudiant la nature des racines de l'équation

$$Ag^2 + 2Bgh + Ch^2 + 2Dgi + 2Ehi + Fi^2 = 0.$$

Il est évident par exemple qu'il y aura maximum ou minimum si en résolvant cette équation par rapport à g, h ou i on ne trouve que des valeurs imaginaires. Bornons-nous à développer ce cas particulier. Résolvons l'équation proposée par rapport à g : les valeurs seront imaginaires si l'on a

$$(Bh+Di)^2 < A(Ch^2+2Ehi+Fi^2),$$

ou bien

$$(B^2-AC)h^2+2(BD-AE)hi+(D^2-AF)i^2<0,$$

quels que soient h et i. Ainsi il faut d'abord que l'on ait

$$B^2-AC<0 \quad \text{et} \quad D^2-AF<0,$$

puis, qu'en égalant la quantité précédente à zéro, et résolvant par rapport à h ou à i, on ne trouve que des valeurs imaginaires. En résolvant par rapport à h, on reconnaît que les valeurs seront imaginaires si l'on a

$$(BD-AE)^2<(B^2-AC)(D^2-AF).$$

Il résulte donc de ce qui précède que les valeurs de v, x, y déduites des trois équations

$$\frac{dz}{dv}=0, \quad \frac{dz}{dx}=0, \quad \frac{dz}{dy}=0;$$

répondront à un maximum ou à un minimum 1° si elles donnent un signe commun aux trois coefficients différentiels du second ordre $\frac{d^2z}{dv^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$; 2° si elles satisfont aux conditions

$$\left(\frac{d^2z}{dvdx}\right)^2 < \frac{d^2z}{dv^2}\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \left(\frac{d^2z}{dvdy}\right)^2 < \frac{d^2z}{dv^2}\frac{d^2z}{dy^2},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dvdx}\frac{d^2z}{dvdy} - \frac{d^2z}{dv^2}\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 < \left[\left(\frac{d^2z}{dvdx}\right)^2 - \frac{d^2z}{dv^2}\frac{d^2z}{dx^2}\right]\left[\left(\frac{d^2z}{dvdy}\right)^2 - \frac{d^2z}{dv^2}\frac{d^2z}{dy^2}\right];$$

et il y aura maximum ou minimum suivant que les trois coefficients différentiels $\frac{d^2z}{dv^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ seront negatifs ou positifs.

Si l'équation

$$Ag^2 + 2Bgh + \text{etc.} = 0$$

avait au contraire des racines réelles inégales, le maximum et le minimum seraient impossibles. Mais si les racines réelles de cette équation sont égales, la question exigera une discussion semblable à celle qui termine le n° 147.

151. Pour donner une application des règles précédentes, on supposera que l'on demande la plus courte ou la plus longue parmi toutes les lignes droites qui peuvent être tracées d'un point donné à une courbe également donnée. Désignant par a, b les coordonnées de ce point, et par x, y celles d'un point quelconque de la courbe, l'expression de la longueur des lignes dont il s'agit sera donc

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

et il faut déterminer la valeur de x par la condition de rendre cette expression la plus grande ou la moindre possible. En différentiant par rapport à x, on trouve

$$\frac{x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}};$$

et, en égalant le coefficient différentiel à zéro,

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{d'où} \quad \frac{y-b}{x-a}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Comme $\frac{dy}{dx}$ représente la tangente trigonométrique de l'angle compris entre la tangente menée à la courbe et l'axe des x, on voit que ce résultat exprime en premier lieu que les lignes les plus courtes ou les plus longues, menées du point donné à la courbe, doivent couper cette courbe à angles droits. Si l'on prend ensuite le coefficient différentiel du second ordre, il vient

$$\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}-\frac{\left[(x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}\right]^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

et en supprimant le second terme, qui est nul en vertu de l'équation posée ci-dessus, on voit que le signe de ce coefficient différentiel dépend de celui de la quantité

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Supposons d'abord que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit positif, c'est-à-dire que la courbe tourne sa convexité vers le bas de la page. La quantité précédente sera toujours positive si $y-b$ est positive, c'est-à-dire si le point donné A (*fig.* 30) est placé plus près de l'axe des x que le point M de la courbe sur lequel est dirigée la normale AM ; d'où il suit que la distance AM sera toujours dans ce cas un minimum, ce qui est évident. Mais si $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant toujours supposé positif, la quantité $y-b$ est négative, en sorte que le point donné

soit plus éloigné de l'axe des x que le point M, la quantité dont il s'agit sera positive, et il y aura minimum, si la distance $b-y$ est $< \dfrac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$; tandis que cette même quantité sera négative, et il y aura un maximum, si la distance $b-y$ est $> \dfrac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$. Or, on verra dans la suite, n° 180, que la valeur $b-y = \dfrac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ appartient à un certain point C tellement situé sur la normale, que le cercle décrit de ce point avec le rayon CM coïncide avec la courbe proposée, plus que ne peut le faire tout autre cercle, dans une étendue infiniment petite de part et d'autre du point M. Il est donc évident que ce point C doit séparer sur la normale les points A, pour lesquels la distance A, M est un minimum, et les points A, pour lesquels la distance A,M est un maximum. Le cas où le coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$ serait négatif donnerait lieu à des remarques semblables.

152. Nous considérerons encore la question qui consisterait à déterminer les lignes droites les plus courtes ou les plus longues qui puissent être tracées d'un point d'une courbe donnée à un point d'une autre courbe également donnée. x, y étant les coordonnées d'un point quelconque de la première courbe, et x', y' celles d'un

point quelconque de la seconde courbe, la longueur des lignes dont il s'agit sera exprimée généralement par

$$Z = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

expression qu'il faut considérer comme une fonction des deux variables indépendantes x, x', en regardant y comme une fonction de x seule, et y' comme une fonction de x' seule. Appliquant donc les règles exposées n° 147, on aura d'abord

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{x-x'+(y-y')\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}, \quad \frac{dZ}{dx'} = -\frac{x-x'+(y-y')\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}};$$

et en égalant à zéro ces deux coefficients différentiels,

$$x-x'+(y-y')\frac{dy}{dx}=0, \quad x-x'+(y-y')\frac{dy'}{dx'}=0,$$

d'où

$$\frac{y-y'}{x-x'} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}.$$

Ainsi l'on voit en premier lieu que la ligne, dont la longueur sera un maximum ou un minimum, doit couper les deux courbes à angles droits. Prenant ensuite les coefficients différentiels du second ordre, il vient, en supprimant les termes nuls en vertu des équations précédentes,

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}, \quad \frac{d^2Z}{dxdx'} = -\frac{1+\frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}},$$

$$\frac{d^2Z}{dx'^2} = \frac{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2-(y-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}.$$

D'où l'on conclut que, pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut d'abord que les quantités

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{et} \quad 1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2-(y-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}$$

soient de même signe, et de plus que la condition

$$+\frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}\Big)^2<\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}\right]\left[1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2-(y-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}\right]$$

soit satisfaite. Cette dernière condition suffirait seule : elle entraîne nécessairement la précédente.

Cas où il existe des relations entre les variables.

153. Dans plusieurs questions importantes, les valeurs cherchées des variables, outre la condition de rendre un maximum ou un minimum une certaine fonction V, doivent encore satisfaire à d'autres conditions qui sont exprimées par des équations données entre ces variables. Il est visible d'ailleurs que le nombre de ces équations doit nécessairement être plus petit que celui des variables, dont dépend la fonction proposée V.

Soit par exemple

$$V=f(x,y,z)$$

et admettons que les variables y, x, z doivent satisfaire à l'équation de condition

$$L=0,$$

L désignant une fonction donnée de x, y, z. Ce qui se présente de plus naturel est de résoudre l'équation $L=0$ par rapport à l'une des variables, à z par exemple, et de substituer la valeur obtenue dans $f(x, y, z)$. La fonction V ne contenant plus alors que les deux variables x,

y, qui seront entièrement indépendantes, on se trouvera ramené au cas précédent.

De même s'il existait entre les trois variables x, y, z, les deux équations de condition

$$L=0, \qquad M=0,$$

on tirerait de ces équations les valeurs de y et z en x, et en les substituant dans $f(x, y, z)$, la fonction V ne contiendrait plus que la seule variable indépendante x.

Comme il sera généralement très-difficile, ou même impossible, d'éliminer ainsi les variables au moyen des équations données, on peut remarquer que la condition du maximum ou du minimum de la fonction V exige que l'on ait

$$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz=0\,;$$

et de plus que l'équation de condition $L=0$ étant différentiée, donne

$$\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz=0.$$

Si les variables x, y, z étaient entièrement indépendantes, les différentielles dx, dy, dz étant arbitraires, la première équation entraînerait les équations séparées $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{dV}{dy}=0$, $\frac{dV}{dz}=0$. Mais les valeurs que l'on attribue à ces différentielles doivent satisfaire à la seconde équation. On devra donc prendre dans cette seconde équation la valeur de l'une de ces différentielles, de dz par exemple, et la substituer dans la première, qui ne contiendra plus que dx et dy. On égalera ensuite séparément à zéro les termes affectés de ces deux différentielles. On

obtiendra de cette manière deux équations en x, y, z, qui, réunies à l'équation $L=0$, donneront les valeurs cherchées des trois variables.

S'il y avait deux équations de condition $L=0$, $M=0$, on formerait les deux équations différentielles

$$\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz=0$$
$$\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz=0,$$

au moyen desquelles on éliminerait de l'équation $\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz=0$ deux des différentielles dx, dy, dz. L'équation restante, réunie aux deux équations $L=0$, $M=0$, donnerait les valeurs cherchées des trois variables x, y, z.

Cette méthode peut s'appliquer quel que soit le nombre des variables dont dépend la fonction V, et le nombre des équations de condition ; et elle n'exige que des éliminations entre des équations du premier degré ou linéaires.

154. Mais on parviendra au même résultat d'une manière beaucoup plus simple si, ayant une fonction quelconque V des variables v, x, y, z, etc., qu'il s'agit de rendre un maximum ou un minimum, et plusieurs équations de condition $L=0$, $M=0$, $N=0$, etc., auxquelles ces variables doivent satisfaire, on forme les équations différentielles $dL=0$, $dM=0$, $dN=0$, etc., puis, multipliant respectivement ces équations, par des facteurs indéterminés λ, μ, ν, etc., on les ajoute à l'équation $dV=0$, ce qui donnera l'équation unique

$$dV+\lambda\, dL+\mu . dM+\nu . dN+\text{etc.}=0,$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dV}{dv}dv+\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz+\text{etc.}\\
+\lambda\left(\frac{dL}{dv}dv+\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz+\text{etc.}\right)\\
+\mu\left(\frac{dM}{dv}dv+\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\text{etc.}\right)\\
+\nu\left(\frac{dN}{dv}dv+\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz+\text{etc.}\right)\\
+\qquad \text{etc.}
\end{array}\right\}=0,$$

En disposant convenablement de λ, μ, ν, etc., on rendra nuls les coefficients des différentielles qu'on veut éliminer ; après quoi il faudra égaler à zéro les coefficients des autres différentielles qui sont arbitraires. Les résultats obtenus ainsi seront les mêmes que si l'on avait regardé toutes les variables comme indépendantes, et par suite égalé à zéro le coefficient de chaque différentielle, dans l'équation $dV+\lambda.dL+\text{etc.}=0$: on aura autant d'équations distinctes, qui, réunies aux équations $L=0$, $M=0$, $N=0$, etc., seront en nombre suffisant pour éliminer les nombres arbitraires λ, μ, ν, etc., et déterminer les valeurs cherchées des variables v, x, y, z, etc.

155. Soit proposé, par exemple, de déterminer parmi tous les parallélipipèdes rectangles dont la surface est égale au nombre a^2, celui dont le volume est le plus grand possible. Représentant par x, y, z les trois côtés du parallélipipède, la fonction qu'il s'agit de rendre un maximum est donc

$$V=xyz,$$

et l'on a entre les trois variables l'équation de condition

$$2(xy+xz+yz)=a^2.$$

D'après ce qui a été dit ci-dessus, on formera l'équation

$$\left.\begin{array}{r} yz.dx+xz.dy+xy.dz \\ +\lambda[(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz] \end{array}\right\} = 0,$$

qui donne, en égalant séparément à zéro les termes affectés des différentielles dx, dy, dz,

$$yz+\lambda(y+z)=0, \quad xz+\lambda(x+z)=0, \quad xy+\lambda(x+y)=0.$$

Éliminant λ entre ces équations, il vient

$$x=y=z,$$

et en ayant égard à l'équation de condition

$$x=y=z=\sqrt{\frac{a^2}{6}}.$$

Ainsi la condition du maximum exige que les trois côtés du parallélipipède soient égaux entre eux.

Pour vérifier que ce résultat correspond à un maximum, on remarquera que le terme du second ordre du développement de la fonction $V=xyz$ se réduit à

$$z.dxdy+y.dxdz+x.dydz.$$

S'il y a maximum, cette quantité doit présenter une valeur constamment négative, après que l'on y aura fait $x=y=z$, quelles que soient les valeurs attribuées à dx, dy, dz, pourvu toutefois que ces valeurs satisfassent à l'équation de condition. Or, en faisant $x=y=z$, la quantité précédente devient

$$x(dxdy+dxdz+dydz),$$

et l'équation de condition donne

$$dx+dy+dz=0.$$

Éliminant dz au moyen de cette équation, on a donc pour le terme du second ordre dont il s'agit

$$-x(dx^2+dxdy+dy^2),$$

quantité qui restera toujours négative, quelles que soient les valeurs attribuées à dx et dy

XV. DIFFÉRENTIELLES DE L'AIRE ET DE L'ARC D'UNE COURBE PLANE.

156. Soit la courbe quelconque Mm (*fig.* 31) rapportée aux coordonnées rectangulaires x, y, et dont l'équation

$$y=f(x)$$

est donnée. L'aire de la courbe est l'espace compris entre l'axe des abscisses, la courbe Mm, et deux ordonnées quelconques PM, pm dont la position est fixée. La première ordonnée PM étant supposée conserver une position fixe, et x désignant la distance variable op, il est visible que la grandeur de l'aire PMmp est une fonction de l'abscisse x, qui dépend de la nature de la courbe ou de la fonction $f(x)$.

Nous désignerons cette fonction par u. Il s'agit de trouver l'expression de sa différentielle, c'est-à-dire de la variation que subit la fonction u lorsque l'abscisse x augmente de la quantité infiniment petite dx.

Admettons que op ou x augmente de la quantité finie Δx représentée par pq. L'aire u croîtra de Δu représentée par le trapèze $pmnq$, et l'on peut toujours supposer Δx assez petite pour que la fonction $f(x)$ étant constamment croissante ou décroissante dans l'intervalle pq, ce trapèze

se trouve compris entre les deux rectangles *mp* et *uq*. Nous pouvons donc écrire

$$\Delta u = y.\Delta x \pm \omega.\Delta x, \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = y \pm \omega,$$

ω étant une quantité plus petite que Δy, nous aurons donc, en prenant la limite des deux membres,

$$\frac{du}{dx} = y \quad \text{et} \quad du = y.dx.$$

Ainsi la différentielle de l'aire d'une courbe est égale au produit de dx par la fonction de x qui exprime la valeur de l'ordonnée y, ou si l'on veut l'aire de la courbe est la fonction primitive dont l'ordonnée est le coefficient différentiel ou la fonction dérivée du premier ordre.

157. Considérons maintenant (*fig.* 31) la longueur de l'arc d'une courbe comptée à partir du point fixe quelconque M jusqu'au point *m* dont l'abscisse *op* est représentée par x. Cette longueur étant désignée par s et regardée comme une fonction de l'abscisse x, proposons-nous de connaître l'expression de sa différentielle.

Représentons par *pq* la différence Δx, qui peut toujours être prise assez petite pour que l'arc correspondant *mn* tourne sa concavité du même côté. On pourra donc toujours, conformément aux théorèmes d'Archimède, considérer la longueur de cet arc comme étant comprise entre celle de sa corde *mn* et celle des parties *mt*+*nt* des tangentes menées aux deux extrémités de l'arc. Donc, à plus forte raison l'arc est compris entre *mr* et *ns*, car *mr* est plus petite que la corde, et *st* est plus grande que *mt*. Or $mr = \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{d.f(x)}{dx}\right)^2}$ puisque

$\frac{d.fx}{dx}$ représente la tangente trigonométrique de l'angle que forme la tangente au point m avec l'axe des x. Soit pour abréger $\varphi(x) = \sqrt{1+\left(\frac{d.f(x)}{dx}\right)^2}$. On aura $\varphi(x+\Delta x)$ pour la valeur de $\varphi(x)$ qui convient au point n de la courbe. Donc $ns = \Delta x.\varphi(x+\Delta x)$. Ainsi l'on doit poser

$$\Delta s > \Delta x.\varphi(x) \quad \text{et} \quad \Delta s < \Delta x\left[\varphi(x) + \frac{d.\varphi(x+\theta.\Delta x)}{dx}\Delta x\right];$$

ou si l'on veut

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \varphi(x) + \omega,$$

ω étant une quantité plus petite que $\frac{d.\varphi(x+\theta.\Delta x)}{dx}\Delta x$. D'où l'on déduit, en prenant la limite dont s'approchent indéfiniment les deux membres lorsque Δx tend à devenir nulle,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{d.f(x)}{dx}\right)^2}, \quad \text{et} \quad ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{d.f(x)}{dx}\right)^2};$$

ou bien

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \text{et} \quad ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

158. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que l'ordonnée à partir de laquelle l'aire u étant comptée, où le point fixe de la courbe à partir duquel l'arc s était compté, étaient placés de manière que u et s croissaient en même temps que x. S'il en était autrement on devrait donner le signe — à leurs différentielles, et écrire $du = -ydx$, $ds = -dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

De plus le signe de la différentielle *du* change avec le signe de l'ordonnée y; et en général, lorsque l'on compte les y positives de bas en haut les parties de l'aire d'une courbe qui sont situées au-dessus de l'axe des x sont positives et celles qui sont situées au dessous de cet axe sont négatives.

XVI. DU CONTACT DES COURBES PLANES.

159. On dit que deux courbes se *touchent* lorsqu'elles ont un point commun et une tangente commune. De plus lorsque deux courbes *pq*, *rs* touchent la courbe *mn* au même point M, la courbe *pq*, qui passe entre les deux autres, est regardée comme ayant avec la courbe *mn* un contact plus intime que ne le fait la courbe *rs*. Les géomètres distinguent ainsi des *contacts de divers ordres* dont les caractères se distinguent facilement au moyen de la considération des coefficients différentiels ou fonctions dérivées.

Soient

$$y=f(x) \qquad \text{et} \qquad y=\varphi(x)$$

les équations des deux courbes rapportées à des coordonnées rectangulaires : x désignant l'abscisse du point commun aux deux courbes, et $x+h$ l'abscisse d'un point voisin de celui-ci, leurs ordonnées correspondantes seront respectivement

$$f(x)+\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.}, \text{ et } \varphi(x)+\frac{d.\varphi(x)}{dx}h+\frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.}$$

Si elles ont une tangente commune au point dont l'abscisse est x, on aura en ce point non-seulement $\varphi(x)=f(x)$,

mais $\frac{d.\varphi(x)}{dx}=\frac{d.f(x)}{dx}$. Cette condition étant satisfaite, on est assuré qu'aucune autre ligne ayant pour équation $y=\psi(x)$ ne peut passer entre les deux courbes proposées, à moins que l'on n'ait également $\frac{d.\psi(x)}{dx}=\frac{d.f(x)}{dx}$. En effet la différence des ordonnées des deux courbes proposées correspondantes à $x+h$ peut être exprimée par

$$\left(\frac{d^2.\varphi(x+\theta h)}{dx^2}-\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2};$$

tandis que si la condition dont il s'agit n'avait pas lieu, la différence entre l'ordonnée de la troisième courbe et celle de la première serait exprimée par

$$\left(\frac{d.\psi(x)}{dx}-\frac{d.f(x)}{dx}\right)h+\left(\frac{d^2.\psi(x+\theta h)}{dx^2}-\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2}.$$

Dans toutes ces expressions, θ désigne un nombre indéterminé compris entre 0 et 1, et qui peut être différent dans les diverses fonctions. Or il est visible qu'en prenant h suffisamment petite on pourra toujours rendre la seconde expression plus grande que la première. Donc aucune courbe $y=\psi(x)$, pour laquelle on n'a point $\frac{d.\psi(x)}{dx}=\frac{d.f(x)}{dx}$, ne peut passer entre les deux courbes $y=f(x)$ et $y=\varphi(x)$, pour lesquelles on a $\frac{d.\varphi(x)}{dx}=\frac{d.f(x)}{dx}$.

Deux lignes qui ont un point commun, et pour lesquelles le coefficient différentiel du premier ordre de l'ordonnée a une valeur commune en ce point, ont entre elles un *contact du premier ordre*.

160. Admettons présentement que pour les deux courbes proposées les coefficients différentiels des deux premiers ordres aient des valeurs communes. La différence des ordonnées de ces courbes qui répondent à l'abscisse $x+h$ sera donc exprimée par

$$\left(\frac{d^3.\varphi(x+\theta h)}{dx^3}-\frac{d^3.f(x+\theta h)}{dx^3}\right)\frac{h^3}{2.3};$$

tandis que pour une troisième courbe qui toucherait la première, mais qui ne satisferait pas à la condition dont il s'agit, la différence des ordonnées serait exprimée par

$$\left(\frac{d^2.\psi(x)}{dx^2}-\frac{d^2.f(x)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2}+\left(\frac{d^3.\psi(x+\theta h)}{dx^3}-\frac{d^3.f(x+\theta h)}{dx^3}\right)\frac{h^3}{2.3}.$$

Et comme la seconde expression, lorsque h tend vers la limite zéro, devient toujours plus grande que la première, il s'ensuit que la troisième courbe ne pourra jamais passer entre les deux autres. Donc aucune courbe, pour laquelle les coefficients différentiels des deux premiers ordres ne seraient pas égaux à ceux de la courbe $y=f(x)$, ne pourra passer entre cette courbe et la courbe $y=\varphi(x)$, pour laquelle cette égalité a lieu.

Les lignes pour lesquelles les coefficients différentiels des deux premiers ordres ont une valeur commune, sont dites avoir entre elles un *contact du second ordre*.

161. On peut continuer de la même manière, et l'on verra en général que si les courbes $y=f(x)$ et $y=\varphi(x)$ sont telles, que les n premiers coefficients différentiels des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ aient pour l'abscisse x une valeur commune, auquel cas on dit que ces courbes ont un *contact*

de l'ordre n, aucune autre ligne $y=\psi(x)$ ne pourra passer entre elles, à moins qu'elle ne satisfasse également à la condition que les n premiers coefficients différentiels de la fonction $\psi(x)$, soient égaux aux n premiers coefficients différentiels de la fonction $f(x)$ pour l'abscisse x dont il s'agit. Diverses courbes qui se touchent en un même point doivent donc être regardées comme ayant un contact d'autant plus intime qu'elles ont un plus grand nombre de coefficients différentiels dont les valeurs coïncident. Le nombre de coefficients différentiels communs distingue les contacts de divers ordres, ce qu'il serait impossible de faire par la géométrie seule.

162. Remarquons d'ailleurs que lorsque deux lignes ont un contact de premier ordre, elles ne se coupent pas en général, puisque la différence des ordonnées dans les points voisins ayant pour facteur h^2 ne change pas de signe avec h. Mais lorsqu'elles ont un contact du second ordre, elles se coupent parce que la différence des ordonnées dans les points voisins est affectée de h^3, et change de signe avec h. En général, deux lignes se coupent ou non, en même temps qu'elles se touchent, suivant que leur contact est d'un ordre pair ou d'un ordre impair.

163. Les lignes paraboliques sont les plus simples que l'on puisse mettre en contact avec une courbe donnée. Soit toujours

$$y=f(x)$$

l'équation de cette courbe, et

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots+Hx^n,$$

l'équation d'une courbe parabolique du degré n. A, B, C, D,..... H représentent des coefficients constants qui

doivent être déterminés de manière que la courbe parabolique ait un contact de l'ordre n avec la courbe proposée dans le point dont les coordonnées sont x', y'. Ce contact aura lieu d'après ce qui précède si les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... $\frac{d^ny}{dx^n}$ déduites de la seconde équation sont égales quand on fait $x=x'$ aux valeurs des mêmes quantités déduites de la première. Or, la détermination des constantes A, B, C.....H se trouvera également effectuée de manière à satisfaire à cette condition si l'on prend pour l'équation de la courbe parabolique

$$=y'+\frac{dy'}{dx'}(x-x')+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{(x-x')^2}{2}+\frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{(x-x')^3}{2.3}+\ldots+\frac{d^ny'}{dx'^n}\frac{(x-x')^n}{2.3.4\ldots n},$$

ainsi qu'il est facile de le vérifier.

L'équation de la courbe parabolique dont il s'agit contenait $n+1$ constantes arbitraires, et on a pu lui donner un contact de l'ordre n avec une courbe quelconque proposée. En général on peut toujours établir entre une première courbe et une seconde, en un point donné de la première, un contact dont l'ordre est marqué par le nombre des constantes arbitraires contenues dans l'équation de cette seconde courbe diminuée d'une unité.

164. Si l'on se bornait au premier degré on aurait simplement

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x'),$$

équation d'une ligne droite qui touche la courbe $y=f(x)$ dans le point dont les coordonnées sont x' et y'. Aucune autre droite ne peut passer entre la courbe et la tangente dont il s'agit.

165. L'équation du second degré donne

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{(x-x')^2}{2},$$

équation appartenant à une parabole ordinaire, dont l'axe est parallèle à l'axe des y, qui touche également la courbe donnée dans le point dont les coordonnées sont x', y', et qui de plus a un contact du second ordre avec cette courbe, ou est *osculatrice à cette courbe*, suivant une autre expression fréquemment employée par les géomètres. Aucune autre parabole du second degré, dont l'axe serait également parallèle à l'axe des x, ne peut passer entre la courbe proposée et la parabole représentée par l'équation précédente.

166. En général, on voit qu'un point quelconque M d'une première courbe étant fixé, tout se réduit, pour donner en ce point à une seconde courbe un contact de l'ordre n avec la première, à faire en sorte que l'équation de la seconde courbe et ses équations différentielles jusques et compris l'ordre n, soient vérifiées par les valeurs de l'abscisse x' du point M, de l'ordonnée y' de ce point et des coefficients différentiels $\frac{dy'}{dx'}, \frac{d^2y'}{dx'^2}, \frac{d^3y'}{dx'^3}, \ldots\ldots$ $\frac{d^ny'}{dx'^n}$ de cette ordonnée.

XVII. TANGENTES ET NORMALES AUX COURBES PLANES. ASYMPTOTES.

167. L'équation de la tangente en un point quelconque d'une courbe donnée est, d'après ce qui précède

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x').$$

x', y' représentent les coordonnées du point de contact; $\frac{dy'}{dx'}$ est la valeur du coefficient différentiel du premier ordre de la fonction $y=f(x)$ qui a lieu dans ce même point.

L'équation de la normale, qui se déduit immédiatement de celle de la tangente, est

$$y-y'=-\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x-x')=0,\quad \text{ou}\quad x-x'+\frac{dy'}{dx'}(y-y')=0.$$

168. Lorsqu'on veut exprimer la direction d'une ligne droite, on suppose cette ligne transportée parallèlement à elle-même à l'origine des coordonnées, et l'on considère les angles qu'elle forme avec les parties des axes sur lesquels on compte les coordonnées positives. Nommons α, 6 les angles que la tangente d'une courbe forme avec les parties des axes sur lesquels on compte respectivement les x positives et les y positives. L'angle α aura pour tangente trigonométrique $\frac{dy'}{dx'}$, et le cosinus de l'angle 6 sera toujours égal au sinus de l'angle α. Donc

$$\cos.\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}},\qquad \cos.6=\frac{\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}}.$$

Si l'on représente de la même manière par λ, μ les angles formés par la normale à la courbe avec les parties des axes sur lesquels on compte respectivement les x positives et les y positives, l'angle λ aura pour tangente

trigonométrique $-\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}$, et le cosinus de l'angle μ sera toujours égal au sinus de l'angle λ. Par conséquent

$$\cos.\lambda = -\frac{\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}}, \qquad \cos.\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}}.$$

On peut donner indifféremment le signe + ou le signe — au radical $\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}$, mais on doit lui donner le même signe dans les expressions des cosinus des deux angles qui se rapportent à la même ligne. Suivant le signe que l'on donnera à ce radical, les deux angles se rapporteront à la partie de la ligne qui est d'un côté ou de l'autre de l'origine des coordonnées. Lorsque ce radical est pris positivement il est entendu que l'on considère la partie MS (*fig.* 32) de la tangente qui est située par rapport au point M du côté des x positives, et la partie MN de la normale qui est située par rapport au même point du côté des y positives.

169. On peut aussi, en désignant comme dans le n° 157, par ds la différentielle de l'arc de la courbe, exprimer par

$$\cos.\alpha = \frac{dx'}{ds'} \qquad \text{et} \qquad \cos.\beta = \frac{dy'}{ds'}$$

les cosinus des angles que la tangente au point m forme avec les axes des x et des y; et par

$$\cos.\lambda = -\frac{dy'}{ds'} \qquad \text{et} \qquad \cos.\mu = \frac{dx'}{ds'}$$

les cosinus des angles que la normale au même point forme avec les axes des x et des y. Dans ces formules l'élément différentiel ds' doit être regardé comme pouvant prendre à volonté le signe + ou le signe —, puisque rien ne règle d'avance dans quel sens l'arc s est compté. Mais on doit toujours lui donner le même signe dans les deux formules correspondantes. Suivant que l'un prendra ds' positivement ou négativement, les angles α, β, ou λ, μ se trouveront comptés à partir de l'une ou de l'autre des portions de la tangente ou de la normale qui sont séparées par le point de la courbe.

170. Soit le point M (*fig.* 32) d'une courbe, et supposons la tangente et la normale menées en ce point prolongées jusqu'aux points t et r où elles rencontrent l'axe des x. L'ordonnée y' du point de contact est représentée par MP, et l'on a

$$\text{La } \textit{tangente } \text{MT} = \frac{y'}{\sin.\alpha} = \frac{y'\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}}{\frac{dy'}{dx'}}$$

$$\text{La } \textit{sous-tangente } \text{PT} = \frac{y'}{\text{tang.}\alpha} = \frac{y'}{\frac{dy'}{dx'}}$$

$$\text{La } \textit{normale } \text{MR} = \frac{y'}{\cos.\alpha} = y'\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}$$

$$\text{La } \textit{sous-normale } \text{PR} = y'\,\text{tang.}\,\alpha = y'\frac{dy'}{dx'}.$$

L'ordonnée est moyenne proportionnelle entre la sous-tangente et la sous-normale.

171. Nous remarquerons que l'équation primitive d'une courbe est souvent donnée sous la forme

$$F(x, y) = 0.$$

L'équation différentielle est alors

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0,$$

et l'on a, conformément au n° 44, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$. En mettant cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation de la tangente du n° 167, elle devient

$$\frac{dF}{dx'}(x-x') + \frac{dF}{dy'}(y-y') = 0.$$

On passe de l'équation différentielle de la courbe à l'équation de la tangente en remplaçant le rapport $\frac{dy}{dx}$ par le rapport $\frac{y-y'}{x-x'}$.

L'équation de la normale devient de la même manière

$$\frac{dF}{dy'}(x-x') - \frac{dF}{dx'}(y-y') = 0.$$

On passe également de l'équation différentielle de la courbe à l'équation de la normale en remplaçant le rapport $\frac{dy}{dx}$ par le rapport $-\frac{x-x'}{y-y'}$.

Les angles formés par la tangente avec les axes des x et des y étant toujours désignés par α et β, on a

$$\cos.\alpha = -\frac{\frac{dF}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2}}, \quad \cos.6 = \frac{\frac{dF}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2}}.$$

Et les angles formés par la normale avec les axes des x et des y étant toujours désignés par λ et μ, on a

$$\cos.\lambda = \frac{\frac{dF}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dx'}\right)^2}}, \quad \cos.\mu = \frac{\frac{dF}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2}}.$$

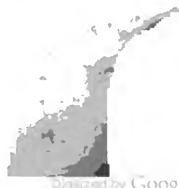
172. Lorsque les courbes ont des branches qui s'étendent à l'infini, il arrive quelquefois qu'elles s'approchent indéfiniment de certaines lignes droites que l'on a nommées *asymptotes*. Les asymptotes sont des tangentes dont le point de contact est placé à une distance infinie de l'origine des coordonnées. L'équation générale

$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')=0$$

convient à l'une quelconque des tangentes de la courbe représentée par l'équation $F(x,y)=0$. Elle appartiendra à une asymptote si l'on y suppose les coordonnées x' ou y' du point de contact infiniment grandes. Par conséquent pour obtenir l'équation des asymptotes d'une courbe donnée, il faut mettre dans l'équation générale des tangentes

$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')=0$$

la valeur de y' en x' tirée de l'équation $F(x', y')=0$, puis faire x' infinie positive ou négative, ce qui donnera



toutes les asymptotes qui ne coïncident pas avec l'axe des y, ou ne seraient pas parallèles à cet axe. On trouvera ces dernières, s'il en existe, en mettant dans la même équation la valeur de x' en y' tirée de l'équation $F(x', y') = 0$, puis faisant y' infinie positive ou négative, et ne considérant que les résultats qui ne correspondent pas à x' infinie.

173. Le même procédé peut s'appliquer au cas où il s'agirait non pas d'une ligne droite, mais de toute autre courbe asymptotique. Après avoir déterminé, conformément à ce qu'on a vu dans l'article XVI, l'équation de la courbe $y = \varphi(x)$ de manière qu'elle ait un contact du premier ordre avec la courbe $y = f(x)$ dans le point dont les coordonnées sont x', y', on connaîtra la figure que doit affecter la courbe $y = \varphi(x)$ pour qu'elle soit asymptote de l'autre en substituant dans son équation les valeurs de y' en x', ou de x' en y' données par l'équation $y' = f(x')$, puis faisant x' ou y' infinie.

174. Nous indiquerons quelques applications de ces formules générales. L'équation de l'*ellipse* ou de l'*hyperbole* rapportée aux diamètres, dont nous désignons respectivement par a et b les demi-longueurs, est

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation différentielle est

$$\frac{x}{a^2}dx \pm \frac{y}{b^2}dy = 0,$$

et donne

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2x}{a^2y}.$$

Les équations de la tangente et de la normale seront respectivement

$$\frac{x'}{a^2}(x-x')\pm\frac{y'}{b^2}(y-y')=0,\quad \text{ou}\quad \frac{x'x}{a^2}\pm\frac{y'y}{b^2}=1,$$

$$\pm\frac{y'}{b^2}(x-x')-\frac{x'}{a^2}(y-y')=0,\ \text{ou}\ \frac{y'x}{b^2}\mp\frac{x'y}{a^2}=x'y'\left(\frac{1}{b^2}\mp\frac{1}{a^2}\right).$$

On aura pour les expressions de la sous-tangente et de la sous-normale,

$$\text{sous-tangente}=\frac{a^2}{x'}-x',\qquad \text{sous-normale}=x'\mp\frac{b^2x'}{a^2}.$$

La sous-tangente est indépendante du petit axe $2b$, et par conséquent elle conserve la même valeur pour le cercle et pour toutes les ellipses dont le diamètre pris pour axe des x a la même longueur $2a$. Le rapport de la sous-normale à l'abscisse est constant pour tous les points d'une même ellipse ou d'une même hyperbole.

Dans l'hyperbole équilatère, dont l'équation en termes finis est

$$xy=\frac{a^2}{2},$$

et l'équation différentielle

$$ydx+xdy=0,\qquad \text{d'où}\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x},$$

on a

$$\text{sous-tangente}=-x',\qquad \text{sous-normale}=-\frac{y'^2}{x'}.$$

La sous-tangente est égale à l'abscisse, mais doit être prise à droite de l'ordonnée, la tangente formant un angle obtus avec les x positives.

175. Pour trouver les asymptotes de l'hyperbole on mettra dans l'équation de la tangente

$$\frac{x'x}{a^2}-\frac{y'y}{b^2}=1$$

la valeur de $\frac{y'}{b}$ déduite de l'équation de la courbe $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$, qui est $\frac{y'}{b}=\pm\sqrt{\frac{x'^2}{a^2}-1}$, ce qui donnera

$$\frac{x'x}{a^2}\mp\sqrt{\frac{x'^2}{a^2}-1}.\frac{y}{b}=1, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a}\mp\sqrt{1-\frac{a^2}{x'^2}}.\frac{y}{b}=\frac{a}{x'};$$

et en faisant x' infiniment grande il viendra

$$\frac{x}{a}\mp\frac{y}{b}=0 \quad \text{ou} \quad y=\pm\frac{b}{a}x$$

pour l'équation de ces asymptotes.

176. Dans la *parabole* représentée par l'équation

$$y^2=2px,$$

on a pour l'équation différentielle

$$ydy=pdx, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

L'équation de la tangente est

$$y'(y-y')=p(x-x') \quad \text{ou} \quad y'y=p(x+x').$$

L'équation de la normale est

$$y'(x-x')+p(y-y')=0.$$

On a pour les expressions de la sous-tangente et de la sous-normale

$$\text{sous-tangente}=2x', \qquad \text{sous-normale}=p.$$

La sous-tangente est toujours double de l'abscisse, qui est ici comptée du sommet de la courbe. La valeur de

la sous-normale est constante dans toute l'étendue de cette courbe.

177. L'équation de la *logarithmique*

$$y = \log. x$$

donne, en changeant l'une pour l'autre les coordonnées, l'équation

$$y = a^x,$$

a désignant la base du système de logarithmes, que nous supposons toujours plus grande que l'unité. L'équation différentielle déduite de cette dernière est

$$dy = la.a^x dx :$$

ainsi l'on aura respectivement pour les équations de la tangente et de la normale

$$y - y' = la.a^{x'}(x - x')$$

$$y - y' + \frac{a^{-x'}}{la}(x - x') = 0.$$

On trouve également

$$\text{sous-tangente} = \frac{1}{la}, \qquad \text{sous-normale} = la.a^{2x'}.$$

Ainsi la sous-tangente est constante et égale au module du système de logarithmes. Mais la sous-normale augmente rapidement à mesure que le point de contact s'éloigne de l'origine des coordonnées.

Si d'après ce qui a été dit n° 172, on remplace y' par sa valeur $a^{x'}$ dans l'équation de la tangente, il viendra

$$y - a^{x'} = la.a^{x'}(x - x').$$

Faisant ensuite $x' = -\frac{1}{0}$ cette équation se réduit à

$$y = 0;$$

d'où l'on conclut que l'axe des y est asymptote de la courbe du côté des x négatives. Il faut remarquer ici que

l'on doit prendre 0 pour la valeur du terme $-x'a^{x'}$ lorsque l'on fait $x'=-\frac{1}{0}$. Car ce produit revient à $\frac{x'}{a^{x'}}$, dans lequel on ferait $x'=\frac{1}{0}$. Or a étant >1, la est positif. L'équation $a^{x'}=1+x'\,la+\frac{x'^2}{2}(la)^2+\ldots..$ donne par suite $a^{x'}>\frac{x'^2}{2}(la)^2$ et $\frac{x'}{a^{x'}}<\frac{2}{x'(la)^2}$. Donc la valeur du rapport dont il s'agit a zéro pour limite quand x' est supposée croître de plus en plus et devenir plus grande que toute ligne donnée.

178. On a nommé *cycloïde* la courbe décrite par un point d'une circonférence de cercle roulant sur une ligne droite. Les propriétés très-remarquables de cette courbe ont plusieurs applications importantes dans la géométrie et dans la mécanique. Soit C (*fig.* 33) la position actuelle du centre du cercle, et m celle du point de sa circonférence qui décrit la courbe. Nous prendrons pour axe des x la ligne droite sur laquelle roule le cercle, et pour origine des coordonnées le point 0 où le point m se trouvait sur cette ligne à l'instant où le mouvement a commencé. Les coordonnées x, y étant donc représentées par op et mp, on aura évidemment, en désignant par R le rayon du cercle dont le mouvement décrit la courbe, et par ω l'angle mCr compris entre le rayon vecteur Cm et le diamètre de ce cercle qui est perpendiculaire à l'axe des x,

$$x=R(\omega-\sin.\omega),\qquad y=R(1-\cos.\omega);$$

d'où

$$\cos.\omega=\frac{R-y}{R},\qquad \sin.\omega=\frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{R}$$

et par conséquent

$$x=R.\,\text{arc}\cos.\frac{R-y}{R}-\sqrt{2Ry-y^2}$$

pour l'équation en termes finis de la courbe. Elle présente une infinité de parties, soit du côté des x positives, soit du côté des x négatives, toutes situées au-dessus de l'axe des x, égales entre elles, et occupant chacune sur cet axe un intervalle $0a$ égal à $2\pi R$. Chaque partie est d'ailleurs formée de deux moitiés dont la figure est symétrique.

Les deux expressions précédentes de x et y étant différentiées donnent

$$dx = R(1 - \cos.\omega)\,d\omega, \qquad dy = R\sin.\omega d\omega.$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin.\omega}{1-\cos.\omega} = \frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2R}{y}-1}.$$

Les équations de la tangente et de la normale sont, respectivement d'après les formules générales du n° 167,

$$y-y' = \sqrt{\frac{2R}{y'}-1}\,(x-x')$$

$$y-y' = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2R}{y'}-1}}\,(x-x').$$

On a de plus

$$\textit{tangente} = y'\sqrt{\frac{2Ry'}{2Ry'-y'^2}}$$

$$\textit{sous-tangente} = \frac{y'^2}{\sqrt{2Ry'-y'^2}}$$

$$\textit{normale} = \sqrt{2Ry'}$$

$$\textit{sous-normale} = \sqrt{2Ry'-y'^2}.$$

La normale coupe toujours l'axe des x au point où cet axe est touché par le cercle générateur.

XVIII. CERCLE OSCULATEUR. DÉVELOPPÉES DES COURBES PLANES.

179. La ligne la plus simple après la ligne droite est le cercle, et comme son équation contient en général trois constantes dont on est libre de disposer, on peut donner à un cercle un contact du second ordre avec une courbe quelconque. Revenons aux notions présentées dans les numéros 159 et suivants. Soit

$$y=f(x)$$

l'équation d'une courbe quelconque proposée, et

$$(\alpha-x)^2+(6-y)^2=\rho^2$$

l'équation d'un cercle quelconque, α et 6 désignant les coordonnées du centre, et ρ le rayon. 1° D'après ce qui a été dit numéro 164, on donnera à ce cercle un contact du premier ordre avec la courbe proposée au point M dont les coordonnées sont x', y', si l'on détermine les constantes α, 6 et ρ de manière que l'équation du cercle et son équation différentielle du premier ordre, qui est

$$\alpha-x+(6-y)\frac{dy}{dx}=0,$$

soient satisfaites par les valeurs de $x', y', \frac{dy'}{dx'}$ qui appartiennent au point M dans cette courbe proposée. Nous avons donc ces deux équations

$$(\alpha-x')^2+(6-y')^2=\rho^2$$
$$\alpha-x'+(6-y')\frac{dy'}{dx'}=0,$$

auxquelles les valeurs de α, β, ρ doivent satisfaire. La seconde, en considérant α et β comme des coordonnées variables, appartient à la normale menée à la courbe au point M, et l'une de ces coordonnées demeure indéterminée. On en conclut que tout cercle dont le centre sera placé sur la normale touchera la courbe, résultat qu'il était facile de prévoir.

180. 2° Pour donner au cercle un contact du second ordre avec la courbe proposée au point M, il faut que l'équation de ce cercle, son équation différentielle du premier ordre, et son équation différentielle du second ordre, qui est

$$1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2-(\beta-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}=0,$$

soient satisfaites par des valeurs de x', y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ qui appartiennent au point M dans cette courbe proposée. Nous avons donc maintenant les trois équations

$$(\alpha-x')^2+(\beta-y')^2=\rho^2$$
$$\alpha-x'+(\beta-y')\frac{dy'}{dx'}=0$$
$$1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2-(\beta-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}=0,$$

par lesquelles les valeurs des constantes α, β et ρ sont entièrement déterminées. On en déduit

$$\alpha-x'=-\frac{\frac{dy'}{dx'}\left[1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}, \qquad \beta-y'=\frac{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

expressions qui font connaître la position du centre osculateur et la grandeur de son rayon. Le signe de la valeur du rayon ρ est indéterminé à raison du radical $\left[1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$, qui peut également être pris positivement ou négativement ; mais il n'en est pas de même des valeurs des quantités $\alpha - x'$ et $6 - y'$, qui sont les projections de ce rayon sur les axes des x et des y. Le signe de ces quantités indique de quel côté de la courbe le centre du cercle osculateur doit être placé sur la normale : on reconnaît facilement que ce centre se trouvera toujours placé, comme cela doit être, du côté de la concavité de la courbe.

181. La détermination du cercle osculateur donne la mesure de la *courbure* d'une ligne quelconque en un point donné. Pour se former la notion de la courbure on admet qu'à partir du point de contact M on s'avance sur la courbe jusqu'à un point voisin N, et que l'on compare la distance NT de ce point à la tangente avec l'intervalle MN parcouru sur la courbe. La limite vers laquelle tend la valeur du rapport $\frac{NT}{MN}$ lorsque la distance MN tend à devenir égale à zéro est la mesure de la courbure de la courbe au point M. Dans le cercle la courbure est égale dans tous les points, et de plus elle est pour divers cercles en raison inverse de leurs rayons. Car soit $MN = \sigma$ dans le cercle dont le rayon est R : on aura $NT = R\left(1 - \cos.\frac{\sigma}{R}\right)$, et $\frac{NT}{MN} = \frac{\left(1 - \cos.\frac{\sigma}{R}\right)}{\sigma}$, quantité qui, à mesure que σ di-

minue, tend à se réduire à $\frac{\sigma}{2R}$. Comme le cercle osculateur dans le voisinage du point de contact s'écarte moins que tout autre cercle de la courbe proposée, on regarde la courbure du cercle osculateur comme donnant la mesure de la courbure de la courbe, qui est ainsi proportionnelle en chacun de ses points à $\frac{1}{\rho}$, en désignant comme ci-dessus par ρ le rayon du cercle osculateur en ce point. Le rayon du cercle osculateur est souvent appelé par cette raison *rayon de courbure*.

Regarder le cercle osculateur comme donnant la mesure de la courbure de la courbe, c'est admettre que dans une étendue infiniment petite de part et d'autre du point de contact, le cercle et la courbe peuvent être pris l'un pour l'autre. Cette seule hypothèse suffit pour établir les résultats précédents. Soit en effet s l'arc de la courbe compté jusqu'au point dont l'abscisse est x, et τ l'angle compris entre l'axe des x et la tangente de la courbe menée au même point, les quantités s et τ étant regardées comme des fonctions de x. Lorsque cette abscisse x croîtra de dx, s croîtra de ds, et τ croîtra de $d\tau$. La différentielle $d\tau$ représentera l'angle compris entre les deux tangentes de la courbe menées aux points qui répondent aux abscisses x et $x+dx$, ou si l'on veut l'angle compris entre les deux normales menées à la courbe en ces mêmes points. Or l'arc ds étant regardé comme appartenant au cercle osculateur dont le rayon est ρ, on a

$$ds=\rho . d\tau,$$

c'est-à-dire

$$dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\rho.d\left(\text{arc tang.}=\frac{dy}{dx}\right)=\rho\frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

d'où l'on tire comme ci-dessus

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

La longueur du rayon de courbure étant déterminée, la position du centre du cercle osculateur est connue, puisque l'on sait que le rayon de courbure est dirigé suivant la normale du côté où la courbe tourne sa concavité.

Nous omettons ici, pour plus de simplicité, les accents dont les lettres x, y sont affectées dans les formules des numéros précédents. On n'oubliera point qu'elles expriment les coordonnées du point où la courbe proposée est touchée par le cercle osculateur.

182. L'angle $d\tau$, ou l'angle compris entre deux tangentes ou entre deux normales à la courbe, menées aux extrémités de l'arc infiniment petit ds, est appelé *angle de contingence*. Comme on déduit de l'équation précédente

$$\rho=\frac{ds}{d\tau},$$

on voit que le rayon de courbure est égal à l'élément de l'arc divisé par l'angle de contingence.

183. Si nous supposons d'ailleurs, comme on l'a fait dans le n° 171, que l'équation de la courbe proposée soit donnée sous la forme

$$F(x,y)=0.$$

On aura d'après le n° 72,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dxdy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \frac{d^2F}{dy^2}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^3},$$

et en mettant ces valeurs dans les expressions de α, 6 et ρ du n° 181, il viendra

$$\alpha - x = -\frac{\frac{dF}{dx}\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right]}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dxdy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \frac{d^2F}{dy^2}}$$

$$6 - y = -\frac{\frac{dF}{dy}\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right]}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dxdy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \frac{d^2F}{dy^2}}$$

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dxdy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \frac{d^2F}{dy^2}}.$$

184. Nous avons supposé dans ce qui précède que l'abscisse x était prise pour variable indépendante. On peut aussi faire varier également x et y, en regardant ces deux coordonnées comme des fonctions d'une troisième variable quelconque. Dans ce cas l'équation du cercle et ses deux équations différentielles du premier et du second ordre étant

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = \rho^2$$
$$(\alpha - x)\,dx + (\beta - y)\,dy = 0$$
$$dx^2 + dy^2 - (\alpha - x)\,d^2x - (\beta - y)\,d^2y = 0,$$

on trouve, en désignant par ds l'élément de la courbe, $\sqrt{dx^2+dy^2}$,

$$\alpha - x = -\frac{dy\,ds^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \quad \beta - y = \frac{dx\,ds^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$
$$\rho = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

On parviendrait aux mêmes résultats en substituant dans les expressions du numéro 180 les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ données dans l'article IX pour le changement de la variable indépendante. Les résultats dont il s'agit conviennent sans modification au cas où l'arc s est pris pour la variable indépendante, et où, par conséquent, la différentielle ds est supposée constante.

On peut d'ailleurs les représenter sous une autre forme, en remarquant que

$$(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = ds^2\,[(d^2x)^2 + (d^2y)^2] - (dx\,d^2x + dy\,d^2y)^2$$
$$= ds^2\,[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2];$$

et d'autre part que

$$-dy\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = ds\,(ds\,d^2x - dx\,d^2s) = ds^3 . d\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

$$dx\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = ds\,(ds\,d^2y - dy\,d^2s) = ds^3 . d\left(\frac{dy}{ds}\right).$$

Il vient donc

$$\alpha - x = \frac{ds^3 . d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}, \quad \beta - y = \frac{ds^3 . d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}$$

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}}.$$

On conclut de ces expressions qu'en représentant par λ et μ les angles formés par les axes des x et des y par la partie de la normale sur laquelle est placé le rayon ρ, on a

$$\cos.\lambda = \frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dx}{ds}\right), \qquad \cos\mu = \frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dy}{ds}\right).$$

Si l'arc s est pris pour variable indépendante, on fera $d^2s=0$, et l'on remplacera $d\left(\frac{dx}{ds}\right)$ et $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$ par $\frac{d^2x}{ds}$ et $\frac{d^2y}{ds}$.

185. Les résultats auxquels on vient de parvenir deviennent très-sensibles lorsque la courbe est regardée comme la limite d'un polygone dont le nombre des côtés augmente de plus en plus. Soient l, m, n (*fig.* 34) trois points de la courbe proposée dont les abscisses op, oq, or sont x, $x+dx$, $x+dx+d(x+dx)$ ou $x+2dx+d^2x$. En prolongeant l'arc lm considéré comme une ligne droite, formant le triangle mbc égal au triangle lam, traçant cn, et menant cd et ce perpendiculaires sur nr et mn (que l'on considère également comme une ligne droite), on voit que cd représente d^2x; nd, d^2y; et ne, d^2s. Mais $nc=\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2}$. Donc $ce=\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2-(d^2s)^2}$. Or $\frac{ce}{cm}$ est l'angle de contingence, c'est-à-dire $\frac{ds}{\rho}$, donc

$$\frac{ds}{\rho}=\frac{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2-(d^2s)^2}}{ds}.$$

De plus $\frac{dx}{ds}$ représente le cosinus de l'ange alm formé par la tangente au point l avec l'axe des x. Or quand on

passe du point l au point m, ce cosinus varie d'une quantité proportionnelle à la projection de ce sur mb. Donc $\frac{ce}{cm}.\cos.\lambda = d\left(\frac{dx}{ds}\right)$. On a de même $\frac{ce}{cm}.\cos.\mu = d\left(\frac{dy}{ds}\right)$. D'où l'on conclut

$$\cos.\lambda = \frac{ds.d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2-(d^2s)^2}}, \quad \cos.\mu = \frac{ds.d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2-(d^2s)^2}}$$

expressions qui reviennent aux précédentes.

Développées.

186. Soit toujours

$$y = f(x) \tag{A}$$

l'équation d'une courbe donnée. Nous aurons d'après le n° 180, pour déterminer le cercle osculateur au point de cette courbe dont les coordonnées sont x, y les trois équations

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha - x)^2 + (6 - y)^2 = \rho^2 \\ &(\alpha - x) + (6 - y)\frac{dy}{dx} = 0 \\ &1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (6 - y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

dans lesquelles α, 6 représentent les coordonnées du centre de ce cercle, et ρ son rayon. Les valeurs de α et 6 déduites de ces équations ont été données n° 180 et sont

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad 6 = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{C}$$

En mettant pour y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ leurs valeurs en x déduites de l'équation (A) de la courbe proposée, elles se trouveront exprimées au moyen de l'abscisse x, et donneront la position du centre de courbure qui répond à un point quelconque de cette courbe.

Quand on fera varier x pour passer d'un point à l'autre de la courbe $y=f(x)$, la position du centre de courbure changera en conséquence. La série de ces positions formera une courbe dont α et β considérées comme variables représentent les coordonnées, et dont on aura évidemment l'équation en éliminant x entre les deux équations (C). En effet, ces expressions conviennent à l'un quelconque des centres de courbure déterminés par la valeur attribuée à x : en faisant disparaître cette variable par l'élimination, il ne reste plus qu'une relation qui convient à tous les centres dont il s'agit, c'est-à-dire à la courbe qui en est le lieu. Cette courbe a été nommée d'après Huygens la *développée* de la courbe donnée, dont l'équation est $y=f(x)$.

187. Les équations (B) appartiennent évidemment à la développée en y considérant α, β et ρ comme variables et comme des fonctions de x. Les différentielles de ces équations lui appartiennent donc également. Or, en différentiant la première équation (B) et en supprimant les termes nuls en vertu de la seconde, on a

$$(\alpha-x)\,d\alpha+(\beta-y)\,d\beta=\rho d\rho. \qquad \text{(D)}$$

En différentiant de même la seconde équation (B) et supprimant les termes nuls en vertu de la troisième, on a de plus

$$dx d\alpha+dy d\beta=0. \qquad \text{(E)}$$

L'équation (E) exprime que les tangentes menées aux points correspondants d'une courbe et de sa développée sont toujours perpendiculaires l'une sur l'autre. Ainsi le rayon de courbure touche constamment la développée. Remarquons de plus que l'équation (D) peut s'écrire

$$\frac{\alpha-x}{\rho}d\alpha+\frac{6-y}{\rho}d6=d\rho.$$

Or $\frac{\alpha-x}{\rho}$ et $\frac{6-y}{\rho}$ sont respectivement les cosinus des angles formés avec les axes des x et des y par le rayon tangent à la développée. Donc le premier membre de cette dernière équation représente la somme des projections sur la tangente de la développée des éléments $d\alpha$ et $d6$, c'est-à-dire la longueur de l'élément de l'arc de la développée dont $d\alpha$ et $d6$ sont respectivement les projections sur les axes des x et des y. En le désignant par $d\sigma$, c'est-à-dire en posant $d\sigma=\sqrt{d\alpha^2+d6^2}$, nous aurons donc

$$d\sigma=d\rho.$$

Ainsi nous voyons que tandis qu'on passe sur la courbe proposée du point m (*fig.* 35) dont l'abscisse op est x, au point n dont l'abscisse oq est $x+dx$, et par conséquent du point μ de la développée au point ν, l'arc $\mu\nu$ compris entre ces deux points est égal à la différence des deux rayons de courbure $m\mu$ et $n\nu$.

On conclut des résultats précédents que la courbe mn serait décrite d'un mouvement continu par l'extrémité d'un fil tendu qui aurait été enveloppé sur la courbe $\mu\nu$, et que l'on développerait progressivement. C'est par cette raison que la courbe $\mu\nu$ est nommée la développée

de la courbe *mn*. Réciproquement la courbe *mn* est nommée la *développante* de la courbe $\mu\nu$. La considération des développées est d'un grand usage dans plusieurs applications importantes.

188. Si l'équation de la courbe proposée était donnée sous la forme

$$F(x, y) = 0,$$

on remplacerait alors les équations (C), entre lesquelles x doit être éliminée pour obtenir l'équation de la développante, par les expressions de α et β qui ont été données n° 186. On éliminerait ensuite x et y entre ces dernières équations et l'équation $F(x, y) = 0$ de la courbe proposée.

Exemples de l'application des résultats précédents.

189. Soit en premier lieu l'équation de l'*ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On aura donc ici $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, $\frac{dF}{dx} = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{dF}{dy} = \frac{2y}{b^2}$, $\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{2}{a^2}$, $\frac{d^2F}{dxdy} = 0$, $\frac{d^2F}{dy^2} = \frac{2}{b^2}$, et en substituant dans l'expression de ρ du n° 183, il viendra

$$\rho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

par l'expression du rayon de courbure qui convient à cette courbe.

En substituant maintenant les expressions précédentes dans les valeurs de α et de β du même numéro, on trouve

$$\alpha = x^3 \frac{a^2 - b^2}{a^4}, \qquad \beta = y^3 \frac{b^2 - a^2}{b^4};$$

puis en tirant les valeurs de x et y et les mettant dans l'équation de la courbe, on a

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

pour l'équation de la développée de l'ellipse. Cette ligne est formée de quatre parties égales disposées symétriquement par rapport aux diamètres rectangulaires de l'ellipse. Les rayons de courbure $M\mu$ et $N\nu$ appartenant aux sommets sont représentés respectivement par $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$. La développée touche les axes aux points μ et ν.

L'équation de l'*hyperbole* se déduit de celle de l'*ellipse* en changeant le signe de b^2. L'expression du rayon de courbure demeure la même, mais l'équation de la développée devient

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\beta}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Cette ligne est formée, comme la précédente, de quatre parties égales disposées symétriquement par rapport aux diamètres rectangulaires de l'hyperbole. Le rayon de courbure $M\mu$ qui répond au sommet de la courbe a pour valeur $\frac{b^2}{a}$. La courbe touche l'axe des x au point μ.

190. L'équation de la *parabole*

$$y^2 = 2px$$

donne $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2x}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sqrt{p}}{(2x)^{\frac{3}{2}}}$; et en substituant

dans l'expression de ρ du n° 180, il vient

$$\rho=\frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}.$$

Les mêmes valeurs étant substituées dans les expressions de α et β du même numéro donnent

$$\alpha=p+3x,\qquad \beta=\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}};$$

et en éliminant x entre ces deux expressions, on trouve pour l'équation de la développée de la parabole

$$\beta^2=\frac{8}{27}\frac{(\alpha-p)^3}{p}.$$

Cette courbe est formée de deux parties égales placées symétriquement par rapport à l'axe des x. Le rayon de courbure 0μ qui appartient au sommet de la parabole est égal à p. La développée touche l'axe des x au point μ.

191. A l'égard de la *cycloïde*, dont on s'est occupé dans le n° 178, on a trouvé

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2R}{y}-1},\quad \text{d'où}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{R}{y^2}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\frac{2R}{y}-1}}=-\frac{R}{y^2};$$

et en mettant ces valeurs dans l'expression de ρ du n° 180, il vient

$$\rho=-2\sqrt{2Ry};$$

d'où l'on conclut, en rapprochant ce résultat des formules données n° 178, que le rayon de courbure est toujours double de la normale.

En substituant également les valeurs précédentes dans les expressions de α et 6 du n° 180, on aura

$$\alpha = x + 2\sqrt{2Ry - y^2}, \qquad 6 = -y.$$

Il est visible, soit par ces expressions, soit par celle du rayon de courbure ρ, que le centre de courbure du sommet n de la cycloïde (*fig.* 36) est en ν, en prenant la distance $a\nu = an$. Pour obtenir l'équation de la développée sous la forme la plus simple, nous la rapporterons à deux nouvelles coordonnées α' et $6'$ parallèles aux premières, et qui sont comptées à partir du point ν, dans le sens νb et dans le sens νa. Nous écrirons donc

$$\alpha = \pi R - \alpha', \qquad 6 = -2R + 6',$$

ce qui changera les équations précédentes en

$$\alpha' = \pi R - x - 2\sqrt{2Ry - y^2}, \qquad y = 2R - 6';$$

d'où l'on tire, en ayant égard à l'expression de x en y du n° 178,

$$\alpha' = R\left(\pi - \text{arc cos.}\,\frac{R-y}{R}\right) - \sqrt{2Ry - y^2};$$

ou enfin en mettant pour y sa valeur en $6'$;

$$\alpha' = R\,\text{arc cos.}\,\frac{R-6'}{R} - \sqrt{2R6' - 6'^2}.$$

Ainsi la développée de la cycloïde est une autre cycloïde égale à la première.

Cette proposition résulte d'ailleurs immédiatement de la valeur obtenue ci-dessus pour le rayon de courbure. Car le centre de courbure devant se trouver pour le point m de la cycloïde sur le prolongement de la normale, à

une distance $r\mu = rm$, il s'ensuit que l'arc $r\mu$ du cercle de rayon R, dont le centre est d, est égal à l'arc rm du cercle du même rayon dont le centre est c. Mais l'arc rm est égal à l'intervalle $0r$: donc l'arc $s\mu$ est égal à l'intervalle νs.

Remarquons de plus que le rayon de courbure est nul au point 0 de la cycloïde $0mn$. Donc l'arc 0μ de la développée est égal au rayon de courbure $m\mu$. Ainsi la longueur totale de la demi-cycloïde $0\mu\nu$ est 4R ; et en général si l'on plaçait au sommet de la courbe l'origine des coordonnées x, y, et si l'on comptait les axes du même point, on aurait

$$s = 2\sqrt{2Ry}.$$

Cette propriété remarquable de la cycloïde, qui consiste à se reproduire par le développement, est liée à la proposition suivante plus générale, et due à Jean Bernouilli. Si, considérant une courbe quelconque dont les extrémités touchent deux côtés d'un rectangle on en forme la développée, puis la développée de celle-ci, et ainsi de suite à l'infini, les courbes obtenues de cette manière approcheront progressivement de se confondre avec une demi-cycloïde.

XIX. COURBES PLANES RAPPORTÉES AUX COORDONNÉES POLAIRES.

192. L'usage des *coordonnées polaires* consiste à remplacer pour fixer la position d'un point quelconque m les coordonnées rectangulaires x et y représentées par $0p$ et mp, au moyen du rayon vecteur r représenté par $0m$ et de l'angle ω formé par ce rayon avec l'axe des x. Les

nouvelles coordonnées sont liées aux premières, comme on l'a déja remarqué n° 79, par les relations

$$x = r\cos.\omega \qquad \text{d'où} \qquad r = +\sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = r\sin.\omega \qquad\qquad \omega = \text{arc tang.}\,\frac{y}{x}.$$

Le rayon vecteur est pris toujours positivement. L'angle ω peut affecter toutes les valeurs positives ou négatives depuis zéro jusqu'à l'infini.

193. L'équation d'une ligne droite passant par le point dont les coordonnées rectangulaires sont x', y', et formant avec l'axe des x l'angle τ, étant en coordonnées rectangulaires

$$y - y' = \text{tang.}\,\tau\,(x - x'),$$

on trouvera pour l'équation de la même droite en coordonnées polaires

$$r\sin.(\omega - \tau) = r'\sin.(\omega' - \tau),$$

ω' et r' désignant les valeurs de r et ω qui appartiennent au point dont les coordonnées sont x' et y'. En effet $r\sin.(\omega-\tau)$ représente évidemment la distance constante de la ligne dont il s'agit à la parallèle menée à cette ligne par l'origine des coordonnées.

194. L'équation de la parabole, quand on place l'origine des coordonnées au sommet, est en coordonnées rectangulaires

$$y^2 = 2px;$$

et en coordonnées polaires

$$r = 2p\,\frac{\cos.\omega}{\sin.^2\omega}.$$

195. L'équation de l'ellipse ou de l'hyperbole en coordonnées rectangulaires, l'origine étant placée au centre, est

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

et en coordonnées polaires

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos.^2\omega \pm a^2\sin.^2\omega}.$$

196. Mais si l'on place l'origine des coordonnées au foyer de la parabole en remplaçant dans l'équation $y^2 = 2px$, x par $\frac{p}{2} + x$, l'équation de cette courbe deviendra

$$y^2 = p(p+2x),$$

ou en faisant $\frac{p}{2} = r'$, r désignant la distance du sommet au foyer,

$$y^2 = 4r'(r'+x).$$

Mettant pour x et y les valeurs données n° 192, on aura pour l'équation en coordonnées polaires

$$r = 2r'\frac{1+\cos.\omega}{\sin.\omega}, \quad \text{ou} \quad r = \frac{2r'}{1-\cos.\omega};$$

et si l'on compte l'angle ω à partir de la portion de l'axe qui est située du côté des x négatives, c'est-à-dire à partir de la portion de l'axe comprise entre le foyer et le sommet de la courbe

$$r = \frac{2r'}{1+\cos.\omega};$$

équation qu'il est facile de déduire immédiatement des propriétés connues de la parabole.

197. Soit e l'excentricité de l'ellipse et de l'hyperbole, c'est-à-dire le rapport entre la distance du centre au foyer et le demi-grand axe ou axe réel. On aura donc $ae=\sqrt{a^2-b^2}$ pour l'ellipse et $ae=\sqrt{a^2+b^2}$ pour l'hyperbole. En plaçant dans l'ellipse l'origine au foyer situé du côté des x positives, et dans l'hyperbole au foyer situé du côté des x négatives, l'abscisse comptée à partir du centre sera $x+ae$ dans la première courbe, et $x-ae$ dans la seconde. Leurs équations deviendront respectivement

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1 \quad \text{et} \quad \frac{(x-ae)^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1;$$

et en substituant pour x et y les expressions du nº 192, on aura en coordonnées polaires pour l'ellipse

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos.\omega},$$

et pour l'hyperbole

$$r=\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos.\omega}, \quad \text{ou} \quad r=\frac{a(e^2-1)}{e\cos.\omega-1}$$

suivant que l'on considérera la branche de la courbe la plus voisine ou la plus éloignée du foyer pris pour origine. Ces dernières équations se déduisent également des propriétés connues des deux courbes dont il s'agit.

198. Nous rechercherons maintenant les expressions différentielles générales qui appartiennent à la direction de la tangente d'une courbe, à son aire, et à la longueur de l'arc, lorsqu'on emploie les coordonnées polaires.

Soit en général

$$r=f(\omega).$$

l'équation d'une courbe proposée. Si l'on demande la direction de la courbe au point dont ω et r sont les coordonnées, on remarquera que la droite formant l'angle τ avec l'axe à partir duquel l'angle ω est compté, dont l'équation

$$r = r' \frac{\sin.(\omega' - \tau)}{\sin.(\omega - \tau)}$$

a été donnée n° 193, sera tangente à la courbe au point dont il s'agit (conformément aux principes exposés article XVI), si la valeur de $\frac{dr}{d\omega}$ déduite de l'équation de la droite est égale en ce point à la valeur du même coefficient différentiel déduite de l'équation de la courbe. Or, en différentiant l'expression précédente de r on trouve

$$\frac{dr}{d\omega} = -r' \frac{\sin.(\omega' - \tau)\cos.(\omega - \tau)}{\sin.^2(\omega - \tau)}$$

ou

$$\frac{dr}{d\omega} = -r\cot.(\omega - \tau);$$

donc l'angle τ formé par la courbe avec l'axe à partir duquel on compte l'angle ω est déterminé en général par l'equation

$$\cot.(\tau - \omega) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega},$$

$\frac{dr}{d\omega}$ représentant le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction $r = f(\omega)$. Il est superflu de remarquer d'ailleurs que $\tau - \omega$ est l'angle compris entre la tangente de la courbe et le rayon vecteur.

Le même résultat peut être facilement obtenu par la

géométrie. Car soit m, n (*fig.* 37) les deux points de la courbe correspondants aux valeurs ω et $\omega+d\omega$ de l'inclinaison du rayon vecteur. L'arc mq décrit au point 0 avec le rayon $0m=r$ aura pour longueur $rd\omega$, et nq représentera dr. Mais à la limite nous regardons mq comme une ligne droite perpendiculaire à $0m$, et la courbe comme coïncidant avec la tangente dans l'intervalle mn. Remarquant de plus que l'angle nmq est le complément de l'angle $\tau-\omega$, on aura comme ci-dessus

$$\cot.(\tau-\omega)=\frac{dr}{rd\omega}.$$

Si l'on nomme σ l'angle formé par la normale menée à la courbe au point m avec l'axe des x, on aura donc d'après la formule précédente

$$\text{tang.}(\sigma-\omega)=-\frac{rd\omega}{dr},$$

$\sigma-\omega$ étant l'angle formé par la normale et le rayon vecteur.

199. L'aire de la courbe, lorsque l'on emploie des coordonnées polaires est l'espace triangulaire compris entre cette courbe, un rayon vecteur fixe (par exemple le rayon $0a$ (*fig.* 37) qui coïncide avec l'axe), et le rayon vecteur mobile $0n$. Nous désignerons cet axe par u. Lorsque ω augmente de $d\omega$, u croît du triangle $0mn$, dont l'aire, en regardant encore mn comme une ligne droite, est

$$\frac{1}{2}(r+dr)rd\omega.$$

Nous aurons donc en négligeant (comme on doit le faire en passant à la limite), les quantités infiniment petites du second ordre

$$du=\frac{1}{2}r\,d\omega.$$

200. Quant à la différentielle de l'arc de la courbe, que nous continuons à représenter par s, elle est évidemment exprimée, puisque l'élément mn (*fig.* 37) peut être regardé à la limite comme l'hypothénuse du triangle rectangle mnq, dont les côtés sont $rd\omega$ et dr, par

$$ds = d\omega\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}.$$

Nous supposons que l'arc s augmentera en même temps que l'angle ω.

201. Si l'on veut enfin connaître l'expression générale du rayon de courbure en coordonnées polaires, on emploiera la formule du n° 181,

$$\rho = \frac{ds}{d\tau};$$

en observant que de l'équation du n° 198

$$\cot.(\tau - \omega) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega},$$

on déduit par la différentiation

$$-\frac{d\tau - d\omega}{\sin.^2(\tau - \omega)} = d.\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right), \text{ ou } \frac{d\tau}{d\omega} = 1 - \sin.^2(\tau - \omega).\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right).$$

Mais cette même équation donne

$$\sin.^2(\tau - \omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2}.$$

Donc

$$\frac{d\tau}{d\omega} = \frac{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)}{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2}.$$

D'ailleurs nous avons trouvé ci-dessus

$$\frac{ds}{d\omega}=r\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\rho=\frac{ds}{d\tau}=\frac{r\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1+2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2-\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\omega^2}}$$

ou si l'on veut

$$\rho=\frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\omega^2}}.$$

La direction de la normale, étant connue d'après le n° 198, cette expression du rayon de courbure suffit pour déterminer la position du centre du cercle osculateur. Le radical $\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ peut être affecté du signe + ou du signe —. Si l'on convient de prendre le signe + il s'ensuivra que le rayon de courbure sera regardé comme positif lorsque les différentielles $d\tau$ et ds seront de même signe, et comme négatif lorsqu'elles seront de signe contraire. Nous supposons ici que l'arc s augmente dans le même sens que l'angle ω. Ainsi le rayon de courbure est censé positif lorsque la concavité de la courbe est tournée du côté de l'origine ou pôle dont émane le rayon vecteur et négatif dans le cas contraire.

Courbes nommées spirales.

202. Les géomètres ont donné le nom de *spirales* à diverses courbes dont la nature et les propriétés s'expriment d'une manière plus simple au moyen des coordonnées polaires.

La *spirale d'Archimède* a pour équation

$$r = a\omega,$$

a désignant une constante positive. La courbe commence à l'origine ou pôle, et forme une infinité de révolutions autour de ce point, dont elle s'éloigne de plus en plus.

203. Dans la *spirale hyperbolique*, ainsi nommée à raison de l'analogie de son équation

$$r = \frac{a}{\omega}$$

(a désignant toujours une constante positive) avec celle de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, la courbe prend son origine à une distance infinie du pôle, où elle touche une droite parallèle à l'axe des x dont l'équation est $y = a$ (puisque l'équation précédente peut s'écrire $y = a\,\frac{\sin.\,\omega}{\omega}$, et donne $y = a$ lorsque $\omega = 0$). Elle forme une infinité de révolutions autour du pôle, dont elle s'approche progressivement, mais sans l'atteindre, puisque l'on n'a $r = 0$ qu'en attribuant à l'angle ω une valeur infinie.

204. La *spirale logarithmique*, courbe très-remarquable dont les propriétés ont été étudiées par Jacques Bernouilli, a pour équation



$$\omega = \log. r, \quad \text{ou} \quad r = a^{\omega}, \quad \text{ou enfin} \quad r = e^{la.\omega},$$

a désignant la base du système de logarithmes, que nous supposons plus grande que l'unité. La valeur 0A de r qui correspond à $\omega = 0$ est égale à l'unité. Lorsque ω croît positivement à partir de zéro, r augmente de plus en plus : ainsi la courbe à partir du point A forme autour du pôle une infinité de révolutions en s'éloignant progressivement de ce point. Lorsque ω croît négativement à partir de zéro, r diminue de plus en plus : la courbe forme également à partir du point A, et en s'approchant progressivement du point 0, sans l'atteindre, une infinité de révolutions.

De l'équation

$$r = e^{la.\omega}$$

on déduit

$$\frac{dr}{d\omega} = la.e^{la.\omega}, \qquad \frac{d^2r}{d\omega^2} = (la)^2.e^{la.\omega}.$$

La formule du n° 198, tang. $(\sigma - \omega) = -\frac{dr}{rd\omega}$, donne donc ici pour déterminer l'angle compris entre la normale et le rayon vecteur

$$\text{tang.}\,(\sigma - \omega) = -la.$$

Ainsi cet angle a une valeur constante.

L'expression du rayon de courbure, n° 201,

$$\rho = \frac{r\left[1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1 + 2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\omega^2}},$$

devient ici

$$\rho = r\sqrt{1 + (la)^2} = \frac{r}{\cos.(\omega - \sigma)}.$$

Donc μ étant (*fig*. 38) le centre de courbure correspondant au point m de la spirale logarithmique, la ligne 0μ est perpendiculaire sur le rayon vecteur $0m$. Le rayon vecteur et le rayon de courbure conservent un rapport constant.

Soient Ω et R les coordonnées polaires du centre de courbure μ. On aura donc d'après ce qui précède

$$\Omega = \omega + \frac{\pi}{2}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - r^2} = la.r;$$

et en substituant les valeurs de ω et r tirées de ces équations dans l'équation $r = e^{la.\omega}$ de la courbe, il viendra

$$R = la.e^{la\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)};$$

ou ce qui revient au même,

$$R = e^{la\left(\Omega - \frac{\pi}{2} + \frac{l.la}{la}\right)}$$

pour l'équation polaire de la développée. Donc la développée de la spirale logarithmique est cette même courbe qui a tourné autour du pôle d'un angle à $\frac{\pi}{2} - \frac{l.la}{la}$. Il suffit d'ailleurs, pour reconnaître que la développée est une spirale logarithmique, de remarquer que sa tangente qui n'est autre chose que le rayon μm, forme un angle constant avec son rayon vecteur 0μ.

XX. POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES.

205. Les notions qui ont été exposées dans les articles XVI et suivants, et qui se rapportent à la détermination des tangentes des courbes, de leurs cercles osculateurs, ou en général des courbes osculatrices, sont fondées sur

l'emploi du théorème de Taylor, et supposent en général que les coefficients différentiels de la fonction qui exprime la valeur de l'ordonnée au moyen de l'abscisse prennent, pour le point de la courbe que l'on considère, des valeurs finies et déterminées. Il est donc nécessaire, conformément à ce qu'on a vu dans l'article X, que la figure de la courbe soit continue près de ces points : et de plus il ne faut pas que la fonction dont il s'agit se trouve, pour la valeur de l'abscisse qui leur appartient, dans les cas d'exception qui ont été remarqués dans ce même article. Lorsqu'il en est autrement, la figure des courbes est en général affectée d'une manière particulière et présente ce qu'on nomme un *point singulier*.

Dans la plupart des cas, l'existence des points singuliers tient à ce que la courbe a deux ou plusieurs branches qui se réunissent dans les points dont il s'agit. Néanmoins les courbes qui ont un cours unique, ou qui sont partagées en plusieurs branches distinctes qui ne se croisent point, présentent quelquefois des points remarquables que l'on a généralement compris sous la dénomination de points singuliers.

Concevons que l'on ait formé les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., de l'ordonnée y de la courbe exprimée en fonction de l'abscisse x.

Si le premier coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ devient nul pour une valeur $x=a$ de l'abscisse, les autres coefficients conservant des valeurs finies, la tangente de la courbe est au point correspondant parallèle à l'axe des x ; et l'ordonnée, conformément à ce qu'on a vu dans l'article XIV, est un maximum ou un minimum.

Si le coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$ devient seul nul, tous les autres conservant des valeurs finies, le rayon de courbure est infini, et le sens de la courbure change. Il y a un *point d'inflexion*.

Si le coefficient différentiel du troisième ordre $\frac{d^3y}{dx^3}$ devenait seul nul, cela indiquerait que $\frac{d^2y}{dx^2}$ est un maximum ou un minimum : mais cette circonstance ne peut en général se remarquer sur la figure de la courbe.

Si les deux premiers coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ étaient nuls en même temps, on se trouverait dans le cas remarqué à la fin du n° 145, c'est-à-dire qu'il y aurait un point d'inflexion dans lequel la tangente de la courbe serait parallèle à l'axe des x.

206. Outre les cas où quelques-uns des coefficients différentiels prennent des valeurs nulles, on doit considérer ceux où ils prennent des valeurs infinies.

Si le coefficient différentiel du premier ordre $\frac{dy}{dx}$ prend une valeur infinie, la tangente de la courbe est parallèle à l'axe des y. Cela peut arriver dans quatre cas : en un point L (*fig.* 39) formant dans le sens de x la limite de l'espace occupé par la courbe ; en M lorsque l'ordonnée est infinie et la courbe touche une ligne parallèle à l'axe des y ; en N lorsqu'il y a un point d'inflexion ; et enfin en O dans un *point de rebroussement*.

Si le coefficient différentiel du second ordre devenait seul infini, il en résulterait que la valeur du rayon de courbure serait nulle.

207. Considérons maintenant les cas où les courbes présentent plusieurs branches dont la réunion ou le croisement donnent lieu à des points singuliers. Les cas dont il s'agit répondent toujours à ceux qui ont été remarqués dans les numéros 90 et suivants. En effet, une courbe ne peut avoir plusieurs branches qu'autant que la fonction $y=f(x)$ qui représente l'ordonnée contient des radicaux pairs auxquels on doit attribuer un double signe. En général à chaque valeur de x répondent plusieurs valeurs de y, et autant de valeurs de chacun des coefficients différentiels qui appartiennent respectivement aux différentes branches de la courbe. Mais si la valeur particulière $x=a$ fait disparaître un radical dans $f(x)$, et réduit par conséquent les valeurs de y à un moindre nombre, deux ou plusieurs branches de la courbe se réunissent dans le point correspondant, qui devient ce que l'on nomme un *point multiple*. On a vu d'ailleurs dans les numéros cités qu'il fallait ici distinguer deux cas.

1° Lorsque le radical disparaît dans $f(x)$ pour la valeur $x=a$ parce que cette valeur rend nul ce radical même, le développement de $f(a+h)$ ne peut alors contenir que des puissances fractionnaires de h, et par conséquent tous les coefficients différentiels doivent devenir infinis.

2° Lorsque le radical disparaît parce que la valeur $x=a$ rend nul un certain facteur dont ce radical est

affecté dans $f(x)$, mais qui peut reparaître dans les coefficients différentiels après un certain nombre de différentiations, la formule de Taylor subsiste. Mais les premiers coefficients différentiels dans lesquels ce facteur se trouve encore deviennent nuls pour la valeur $x=a$, tandis que les coefficients différentiels des ordres suivants où se retrouve le radical dont il s'agit, présentent des valeurs finies et distinctes appartenant respectivement aux diverses branches de la courbe.

On voit donc, d'après ce qui précède, qu'un point multiple peut être indiqué par les valeurs infinies que prendraient les coefficients différentiels du premier ordre et des ordres supérieurs. Mais cette indication n'est pas certaine, puisque la même chose peut avoir lieu dans un point d'inflexion où la tangente de la courbe serait parallèle à l'axe des y.

On voit encore qu'un point multiple peut être indiqué parce que les premiers coefficients différentiels auraient des valeurs nulles. Cette circonstance peut également avoir lieu pour un point d'inflexion où la tangente de la courbe serait parallèle à l'axe des x. Mais si les premiers coefficients différentiels réduits à zéro sont suivis d'autres coefficients différentiels affectés de radicaux, on est bien assuré que le point dont il s'agit est formé par la réunion de plusieurs branches de la courbe qui ont entre elles un contact dont l'ordre est marqué par le nombre des coefficients différentiels qui reçoivent la valeur commune zéro.

En général les valeurs nulles ou infinies affectées par les premiers coefficients différentiels ne peuvent faire juger exactement de la nature du point singulier, et il

est nécessaire pour s'en assurer de discuter le cours de la courbe près de ce point.

208. Le cas le plus simple auquel s'appliquent les considérations précédentes est celui du point M (*fig.* 40) qui forme la limite d'une courbe dans le sens des x. On doit considérer les deux parties Mm, Mm' comme deux branches distinctes (soit qu'elles s'étendent à l'infini, ou qu'elles se rejoignent pour former une courbe fermée), qui se réunissent en M. Les coefficients différentiels du premier ordre et des ordres supérieurs sont infinis pour la valeur de l'abscisse qui répond à un tel point. La même chose a lieu lorsque la limite de la courbe est formée par un point de rebroussement N.

Remarquons que le point N, où les deux branches de la courbe sont du même côté de la tangente commune, est un point de rebroussement de la *seconde espèce*; et que le point O de la figure du n° 206, où les deux branches de la courbe sont placées de part et d'autre de la tangente commune, est un point de rebroussement de la *première espèce*. Le cas où tous les coefficients différentiels deviennent infinis peut répondre d'ailleurs à divers points multiples O, P, dans lesquels se réunissent deux ou plusieurs branches de courbe qui touchent (en se croisant ou non) une même ligne parallèle à l'axe des y.

209. A l'égard des cas où les premiers coefficients différentiels deviennent nuls, tandis que les coefficients différentiels suivants conservent des valeurs finies affectées de radicaux, ils donnent lieu à des points multiples analogues aux points O et P, mais dans lesquels la tangente de la courbe est parallèle à l'axe des x.

Mais si la première différentiation a suffi pour faire disparaître le facteur dont le radical était affecté dans la fonction et qui devenait nul pour la valeur particulière $x = a$; en sorte que le radical se retrouvant dans $\frac{dy}{dx}$, ce coefficient différentiel présente plusieurs valeurs finies distinctes; on aura lors un point multiple Q dans lequel les branches de la courbe se croiseront sans se toucher. Et si dans un tel point la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ se trouvait nulle, il y aurait comme en R une inflexion dans chacune des branches de la courbe.

210. Nous terminerons enfin en observant que l'on a nommé points isolés ou conjugués certains points dont les coordonnées satisfont à l'équation proposée entre x et y, mais qui sont entièrement séparés de la ligne que cette équation représente. Il existera, par exemple, un point conjugué correspondant à la valeur $x = a$ si cette valeur fait disparaître dans la fonction $y = f(x)$ un radical sans le faire disparaître dans $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc.; et si ce radical est imaginaire pour la valeur a de x et pour les valeurs comprises entre a et $a \pm b$, b désignant une quantité finie.

XXI. PLANS TANGENTS ET NORMALES AUX SURFACES COURBES.

211. Nous récapitulerons ici succinctement les formules les plus élémentaires de la géométrie à trois dimensions.

La direction d'une ligne droite passant par l'origine des coordonnées est fixée par les trois angles α, β, γ formés par cette ligne avec les parties des axes sur lesquels on compte les coordonnées positives x, y, z. Les cosinus de ces angles sont évidemment entre eux dans les mêmes rapports que les coordonnées x, y, z et l'on a les relations

$$\frac{x}{y}=\frac{\cos.\alpha}{\cos.\beta},\qquad \frac{x}{z}=\frac{\cos.\alpha}{\cos.\gamma},\qquad \frac{y}{z}=\frac{\cos.\beta}{\cos.\gamma},$$

dont deux quelconques entraînent la troisième. De plus les coordonnées du point de la ligne située à la distance 1 de l'origine étant respectivement cos. α, cos. β, cos. γ, il en résulte

$$\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma=1.$$

D'après cela

$$x=az,\qquad y=bz$$

étant les équations des projections de la droite sur les plans des xz et des yz, on a

$$a=\frac{\cos.\alpha}{\cos.\gamma},\qquad b=\frac{\cos.\beta}{\cos.\gamma};$$

d'où

$$\cos.\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \cos.\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \cos.\gamma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

On peut donner à volonté dans ces formules au radical le signe + ou le signe —, pourvu qu'on lui donne dans toutes trois le même signe. Suivant le signe donné à ce radical, les angles α, β et γ appartiendront à l'une ou à l'autre des parties de la ligne qui sont séparées par

l'origine des coordonnées. Si on le prend positivement, ces angles se rapporteront toujours à la partie de la ligne qui est située du côté des z positives, ou qui forme un angle aigu avec la partie positive de l'axe des z.

212. Soient deux droites passant par l'origine des coordonnées et formant respectivement avec les axes les angles α, β, γ et α', β', γ'. La distance du point de ces droites placées à la distance 1 de l'origine est le double du sinus de la moitié de l'angle qu'elles comprennent. Ainsi, appelant ω cet angle,

$$4\sin.^2\frac{\omega}{2}=(\cos.\alpha-\cos.\alpha')^2+(\cos.\beta-\cos.\beta')^2+(\cos.\gamma-\cos.\gamma')^2,$$

équation qui se réduit à

$$2\sin.^2\frac{\omega}{2}=1-(\cos.\alpha\cos.\alpha'+\cos.\beta\cos.\beta'+\cos.\gamma\cos.\gamma').$$

Mais $\cos.\omega=\cos.^2\frac{\omega}{2}-\sin.^2\frac{\omega}{2}=1-2\sin.^2\frac{\omega}{2}$. Donc

$$\cos.\omega=\cos.\alpha\cos.\alpha'+\cos.\beta\cos.\beta'+\cos.\gamma\cos.\gamma'.$$

Si les deux droites sont perpendiculaires l'une sur l'autre

$$\cos.\alpha\cos.\alpha'+\cos.\beta\cos.\beta'+\cos.\gamma\cos.\gamma'=0.$$

Ainsi les équations des deux droites étant respectivement,

pour la première $\quad x=az,\quad y=bz$
pour la seconde $\quad x=a'z,\quad y=b'z$

elles sont perpendiculaires entre elles si l'on a

$$aa'+bb'+1=0.$$

213. L'équation d'un plan passant par l'origine des coordonnées étant

$$z=fx+gy;$$

et les équations d'une droite passant pas cette même origine

$$z = az, \qquad y = bz;$$

la droite sera comprise dans le plan si ces trois équations peuvent être satisfaites par les mêmes valeurs de x, y, z, ce qui donne la condition

$$1 = af + bg.$$

214. L'équation générale d'un plan est

$$z = fx + gy + h,$$

x, y étant deux variables indépendantes et z une fonction de ces variables. Soit un point quelconque de l'espace dont les coordonnées sont x, y, z; et concevons que de ce point l'on ait mené une droite à l'un quelconque des points du plan dont nous désignerons les coordonnées par x', y', z'. La distance de ces deux points est exprimée par

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

x', y' et z' satisfaisant à l'équation

$$z' = fx' + gy' + h.$$

Or la droite dont il s'agit sera perpendiculaire au plan si l'expression précédente (dans laquelle il faut considérer z' comme une fonction des deux variables indépendantes x' et y') est un minimum. Pour connaître la direction de la perpendiculaire au plan, on égalera donc séparément à zéro, conformément à ce qu'on a vu dans les numéros 147 et suivants, les différentielles de cette expression prises par rapport à x' et à y', ce qui donnera

$$x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0, \qquad y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z') = 0.$$

équations qui appartiennent à la perpendiculaire cherchée et qui en déterminent la direction. En y mettant pour $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ leurs valeurs tirées de l'équation du plan elles deviennent

$$x-x'+f(z-z')=0, \qquad y-y'(z-z')=0.$$

On en conclut que les angles formés par la perpendiculaire au plan proposé avec les axes des x, des y et des z, étant représentés par λ, μ, ν, on a

$$\cos.\lambda=\frac{-f}{\sqrt{f^2+g^2+1}}, \quad \cos.\mu=\frac{-g}{\sqrt{f^2+g^2+1}}, \quad \cos.\nu=\frac{1}{\sqrt{f^2+g^2+1}}.$$

Les angles formés par le plan proposé avec les plans des yz, des xz et des xy ne diffèrent point d'ailleurs des angles λ, μ, ν.

215. De plus, l'angle compris entre deux plans est égal à l'angle compris entre deux droites perpendiculaires à ces plans : ainsi, appelant φ l'angle compris entre les plans dont les équations sont respectivement

$$z=fx+gy+h$$
$$z=f'x+g'y+h'$$

on a

$$\cos.\varphi=\frac{ff'+gg'+1}{\sqrt{f^2+g^2+1}.\sqrt{f'^2+g'^2+1}}.$$

La condition nécessaire pour que les deux plans représentés par les équations précédentes soient perpendiculaires l'un à l'autre, est donc exprimée par l'équation

$$ff'+gg'+1=0.$$

216. Si l'équation du plan est donnée sous la forme

$$K+Lx+My+Nz=0,$$

on aura pour les équations de la normale

$$z-z'=\frac{N}{L}(x-x'), \qquad z-z'=\frac{N}{M}(y-y');$$

et les cosinus des angles formés par la normale avec les axes des x, des y et des z, ou des angles formés par le plan proposé avec les plans des yz, des xz et des xy, seront respectivement

$$\cos.\lambda=\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \quad \cos.\mu=\frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \quad \cos.\nu=\frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$

217. Considérons maintenant une surface quelconque dont l'équation est représentée en général par

$$z=f(x,y),$$

x, y désignant toujours deux variables indépendantes, et proposons-nous de déterminer le plan tangent et la normale menée au point de cette surface, dont x', y', z' désignent les coordonnées. On pourrait d'abord connaître la direction de la normale par la même considération qui a été employée n° 213, car il est évident que la plus courte distance d'un point quelconque de la normale à la surface est dirigée suivant cette ligne elle-même. On trouverait donc, comme dans le numéro cité, pour les équations de la normale,

$$x-x'+\frac{dz'}{dx'}(z-z')=0, \qquad y-y'+\frac{dz'}{dy'}(z-z')=0,$$

$\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ représentant les coefficients différentiels par-

tiels de la fonction z' déduits de l'équation $z'=f(x',y')$, à laquelle doivent satisfaire les coordonnées du point de la surface que l'on considère. Mais il convient mieux ici de déterminer le plan tangent d'après des notions semblables à celles qui ont été présentées dans l'article XVI.

Un plan est tangent à une surface lorsqu'aucun autre plan ne peut passer entre la surface et le plan dont il s'agit. x', y' étant les abscisses d'un point quelconque de la surface proposée, les ordonnées des points voisins seront exprimées en général d'après ce qu'on a vu n° 138, par

$$z'+\frac{dz'}{dx'}h+\frac{dz'}{dy'}i+\frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^2z'}{dx'dy'}hi+\frac{d^2z'}{dy'^2}\frac{i^2}{2}+\text{etc.}$$

De même, l'équation d'un plan quelconque passant par le point dont les coordonnées sont x', y', z' étant

$$z-z'=f(x-x')+g(y-y'),$$

les ordonnées des points voisins de celui-ci sont représentées par

$$z'+fh+gi.$$

La différence entre les ordonnées de la surface et celles du plan est donc

$$\left(\frac{dz'}{dx'}-f\right)h+\left(\frac{dz'}{dx'}-g\right)i+\frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^2z'}{dx'dy'}hi+\frac{d^2z'}{dy'^2}\frac{i^2}{2}+\text{etc.}$$

Mais si nous supposons les coefficients f, g de l'équation du plan déterminé par la condition de faire disparaître les termes du premier ordre, c'est-à-dire si nous posons

$$f=\frac{dz'}{dx'},\qquad g=\frac{dz'}{dy'},$$

cette différence se réduira à

$$\frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^2z'}{dx'dy'}hi+\frac{d^2z'}{dy'^2}\frac{i^2}{2}+\text{etc.};$$

et l'on reconnaîtra, par le même raisonnement qui a été fait n° 160, qu'en attribuant à h et i des valeurs de plus en plus petites, on pourra toujours la rendre moindre que tout autre plan à l'égard duquel on n'aurait point satisfait à la condition précédente.

L'équation d'un plan tangent à la surface proposée au point dont les coordonnées sont x', y', z' est donc, d'après ce qui précède,

$$z-z'=\frac{dz'}{dy'}(z-z')+\frac{dz'}{dy'}(y-y');$$

et l'on en déduit immédiatement pour les équations de la normale, conformément au n° 213,

$$x-x'+\frac{dz'}{dx'}(z-z')=0,\qquad y-y'+\frac{dz'}{dy'}(z-z')=0.$$

$\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ représentent les valeurs des coefficients différentiels partiels déduits de l'équation $z=f(x,y)$ qui appartiennent au point de contact.

Ainsi, en représentant par λ, μ, ν, les angles formés par la normale avec les axes des x, des y et des z, on a

$$\cos.\lambda=\frac{-\frac{dz'}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2+1}},\qquad \cos.\mu=\frac{-\frac{dz'}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2+1}},$$

$$\cos.\nu=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2+1}}.$$

Ces expressions conviennent également aux angles formés par le plan tangent avec les plans des yz, des xz et des xy. Si l'on y prend le radical positivement, elles conviendront à la partie de la normale qui est située, par rapport à la surface, du côté des z positives, où qui forme un angle aigu avec les z positives.

218. Si l'équation de la surface proposée est présentée sous la forme

$$F(x, y, z) = 0,$$

elle aura pour équations différentielles du premier ordre, d'après ce qu'on a vu n° 45,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

L'équation du plan tangent deviendra

$$\frac{dF}{dx'}(x-x') + \frac{dF}{dy'}(y-y') + \frac{dF}{dz'}(z-z') = 0,$$

les équations de la normale seront

$$z-z' = \frac{\frac{dF}{dz'}}{\frac{dF}{dx'}}(x-x'), \qquad z-z' = \frac{\frac{dF}{dz'}}{\frac{dF}{dy'}}(y-y');$$

enfin, les cosinus des angles λ, μ, ν, formés par la normale avec l'axe des x, des y et des z, ou par le plan tangent avec les plans des yz, des xz et des xy, auront pour expressions

$$\cos.\lambda = \frac{\frac{dF}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz'}\right)^2}}, \quad \cos.\mu = \frac{\frac{dF}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz'}\right)^2}},$$

$$\cos.\nu = \frac{\frac{dF}{dz'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz'}\right)^2}}.$$

219. Un plan tangent peut, en général, avoir avec une surface un seul point commun, qui est le point de contact; ou bien il peut la couper suivant une certaine ligne; ou simplement la toucher sans la couper; ou, enfin, la toucher et la couper en même temps dans toute l'étendue de cette ligne. On remarque les cas où le plan tangent touche la surface dans tous les points d'une même ligne droite, propriété qui appartient aux surfaces cylindriques et coniques, et plus généralement aux surfaces développables; et le cas où le plan tangent, coupant la surface suivant une ligne droite, la touche dans un seul point de cette ligne, propriété qui appartient aux surfaces gauches.

Les coordonnées x, y, z de la ligne d'intersection du plan qui touche la surface au point dont les coordonnées sont x', y', z', satisfont évidemment aux deux équations

$$F(x, y, z) = 0$$
$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')+\frac{dF}{dz'}(z-z')=0.$$

En éliminant entre elles l'une quelconque des variables x, y et z, on aura les équations des projections de cette ligne sur les plans coordonnés.

220. On nomme en général *plan normal*, à une surface en un point donné, tout plan mené par ce point perpendiculairement au plan tangent. La normale est la ligne d'intersection de tous les plans normaux. Soit, en général,

$$z-z'=f(x-x')+g(y-y')$$

l'équation d'un plan quelconque passant par le point de la surface dont les coordonnées sont x', y', z'. Ce

plan sera normal à la surface, si les constantes f et g satisfont à l'équation

$$1+f\frac{dz'}{dx'}+g\frac{dz'}{dy'}=0,$$

qui s'obtient par la condition que le plan normal soit perpendiculaire au plan tangent, d'après les n°s 215 et 218 ; ou par la condition que le plan normal contienne la normale, d'après les n°s 213 et 216.

221. Nous remarquerons enfin que si l'on mène un plan quelconque par le point de contact commun à la surface et à son plan tangent, l'intersection de ce plan avec le plan tangent sera tangente à l'intersection de ce même plan avec la surface proposée.

XXII. Courbes a double courbure.

222. Une ligne courbe quelconque existant dans l'espace est donnée par ses projections sur deux des plans coordonnés. Soient

$$y=f(x), \qquad z=F(x)$$

les équations des projections d'une courbe proposée sur les plans des xy et des xz. En éliminant x entre ces deux équations, on en trouvera une troisième entre y et z, qui appartiendra à la projection de la courbe sur le plan des yz. Dans ces équations, x est la variable indépendante, y, z sont des fonctions déterminées de x. La position d'un point d'une courbe est en effet déterminée quand on se donne une seule des coordonnées de ce point.

223. Considérons les deux points de la courbe aux-

quels appartiennent les abscisses x et $x+\Delta x$. La sécante passant par ces deux points, tend à se confondre à mesure que Δx diminue, avec la tangente menée à la courbe dans le point dont l'abscisse est x. Or, les trois coordonnées du premier point étant x, y, z, et celles du second $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$; Δy et Δz étant déterminées par les équations précédentes, les cosinus des angles formés par la sécante avec les axes des x, des y et des z sont exprimés respectivement par

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}},\quad \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}},\quad \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}.$$

ou bien

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}},\quad \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}},\quad \frac{\frac{\Delta z}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}$$

Mais à mesure que Δx approche de devenir égale à zéro, les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ approchent des limites $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, c'est-à-dire des coefficients différentiels des fonctions $y=f(x)$, $z=\mathrm{F}(x)$ qui représentent les ordonnées des projections de la courbe sur les plans des xy et des xz. Donc, appelant α, β, γ les angles formés par la tangente de la courbe avec les axes des x, des y et des z, on a

$$\cos.\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},\quad \cos.\beta=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},$$

$$\cos.\gamma=\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},$$

formules où l'on substituera pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ leurs valeurs déduites des équations $y=f(x)$, $z=\mathrm{F}(x)$.

224. Les expressions précédentes donnent immédiatement les équations de la tangente. Soient en général

$$y-y'=m(x-x'), \qquad z-z'=n(x-x'),$$

les équations d'une droite quelconque passant par le point de la courbe dont les coordonnées sont x', y', z'. Cette droite touchera la courbe, si l'on a (d'après ce qu'on a vu n° 211),

$$m=\frac{\cos.\beta}{\cos.\alpha}=\frac{dy'}{dx'}, \qquad n=\frac{\cos.\gamma}{\cos.\alpha}=\frac{dz'}{dx'}.$$

Les équations de la tangente sont donc

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x'),\quad z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x'),\quad z-z'=\frac{\frac{dz'}{dx'}}{\frac{dy'}{dx'}}(y-y');$$

et, comme il était aisé de le prévoir, les projections de la tangente sont tangentes aux projections de la courbe.

225. On en déduit également l'équation du plan normal. Soit en général

$$z-z'=f(x-x')+g(y-y')$$

l'équation d'un plan passant par le point de la courbe dont les coordonnées sont x', y', z'. On voit par le n° 214, que ce plan sera perpendiculaire à la tangente de la courbe, si l'on a

$$f=-\frac{1}{\frac{dz'}{dx'}}, \qquad g=-\frac{\frac{dy'}{dx'}}{\frac{dz'}{dx'}}.$$

L'équation du plan normal dont il s'agit est donc

$$x-x'+\frac{dy'}{dx'}(y-y')+\frac{dz'}{dx'}(z-z')=0.$$

226. Enfin, désignant toujours par

$$y-y'=m(x-x'), \qquad z-z'=n(x-x'),$$

les équations d'une ligne quelconque passant également par le point de la courbe, dont les coordonnées sont x', y', z', cette ligne sera comprise dans le plan normal, et par conséquent perpendiculaire à la courbe, si les constantes m et n satisfont à l'équation

$$1+m\frac{dy'}{dx'}+n\frac{dz'}{dx'}=0.$$

227. Pour trouver l'expression de la différentielle de l'arc d'une courbe, soient M et N (*fig.* 41) les points dont les coordonnées sont respectivement x, y, z et $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$. La longueur de la corde MN sera $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$. Soit mené par le point M la tangente à la courbe MT, et ayant abaissé sur cette tangente la perpendiculaire NT, projetons l'arc de la courbe MN sur le plan MNT. Appelant φ l'angle MNT compris entre la corde et la tangente, on voit que cette projection de l'arc MN sera plus grande que MN, et plus petite que MT+NT, c'est-à-dire plus petite que

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\,(\cos.\varphi+\sin.\varphi).$$

Donc, appelant Δs la projection de l'arc MN dont il s'agit, on a

$$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta y^2}\,(1+\omega), \text{ ou } \frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\,(1+$$

la quantité ω étant $< \varphi - \frac{\varphi^2}{2}$ — etc. Or, si l'on suppose que Δx tende à devenir égale à zéro, l'arc de la courbe tendra à se confondre avec sa projection, et l'angle φ tendra à devenir nul. On peut donc regarder la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ comme ne différant pas de la limite du rapport de l'arc de la courbe à Δx; et, en désignant cette dernière limite par $\frac{ds}{dx}$, écrire

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, \quad \text{et} \quad ds = dx \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

On donnera le signe + ou le signe — au radical, suivant que l'arc s augmentera ou diminuera quand on fera croître l'abscisse x.

228. On peut d'ailleurs faire ici une remarque analogue à celle du n° 169. Les valeurs des cosinus des angles α, β, γ formés par la tangente à la courbe avec les axes des x, des y et des z, s'exprimeront par

$$\cos.\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos.\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos.\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

On donnera à la différentielle ds dans ces expressions le signe + ou le signe —, suivant que les angles α, β, γ seront comptés à partir de l'une ou de l'autre des portions de la tangente qui sont séparées par le point de contact.

229. Lorsqu'on suppose, comme on l'a fait n° 222, une courbe donnée par ses deux projections sur les plans des xy et des xz, on regarde cette courbe comme étant l'intersection de deux surfaces cylindriques ayant ces

projections pour bases, et dont les arêtes sont respectivement perpendiculaires aux deux plans. Mais une courbe peut être considérée d'une manière plus générale, comme étant l'intersection de deux surfaces quelconques représentées par les équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad F(x, y, z) = 0.$$

Les ordonnées y et z sont alors des fonctions implicites de l'abscisse x. En appliquant donc les notions présentées dans les nos 44 et 45, on différentiera ces deux équations, ce qui donne

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0;$$

et en tirant les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}\frac{dF}{dz} - \frac{dF}{dx}\frac{df}{dz}}{\frac{dF}{dy}\frac{df}{dz} - \frac{df}{dy}\frac{dF}{dz}}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}\frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}}{\frac{dF}{dz}\frac{df}{dy} - \frac{df}{dz}\frac{dF}{dy}}.$$

Ces valeurs doivent être substituées dans les formules des numéros précédents. On pourrait ensuite en éliminer y et z au moyen des équations proposées $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$.

230. Remarquons d'ailleurs que, d'après le n° 218, si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées d'un point de la ligne proposée, les équations des deux plans menés par ce point tangentiellement aux deux surfaces courbes, dont cette ligne proposée est l'intersection, auront respectivement pour équations

$$\frac{df}{dx'}(x-x')+\frac{df}{dy'}(y-y')+\frac{df}{dz'}(z-z')=0$$

$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')+\frac{dF}{dz'}(z-z')=0.$$

Ainsi ces équations appartiennent à la tangente de la courbe et en déterminent la direction. En général, on a les équations de la tangente en remplaçant dans les équations différentielles de la courbe dx', dy', dz' par $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$.

Plan osculateur. Rayons de la première courbure et de la seconde courbure.

231. Les notions exposées dans l'article XVI sur le contact des courbes planes, s'appliquent généralement (comme on a pu le voir dans l'article précédent) au contact des lignes et des surfaces.

Si l'on considère une première ligne représentée par les équations

$$y=f(x), \qquad z=F(x),$$

puis une seconde ligne représentée par les équations

$$y=\varphi(x), \qquad z=\Phi(x),$$

on verra qu'en supposant que ces lignes se rencontrent au point dont les coordonnées sont x, y, z, on aura

$$y+\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.}, \quad z+\frac{d.F(x)}{dx}h+\frac{d^2.F(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.},$$

pour les ordonnées du point de la première courbe correspondante à l'abscisse $x+h$; et

$$y+\frac{d.\varphi(x)}{dx}h+\frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.}, \quad z+\frac{d.\Phi(x)}{dx}h+\frac{d^2.\Phi(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.},$$

pour les ordonnées du point de la seconde courbe correspondant à la même abscisse. Les différences de ces ordonnées seront donc respectivement

$$d=\left(\frac{d.f(x)}{dx}-\frac{d.\varphi(x)}{dx}\right)h+\left(\frac{d^2.f(x)}{dx^2}-\frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2}+\text{etc.},$$

$$\mathrm{D}=\left(\frac{d.\mathrm{F}(x)}{dx}-\frac{d.\Phi(x)}{dx}\right)h+\left(\frac{d^2.\mathrm{F}(x)}{dx^2}-\frac{d^2.\Phi(x)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2}+\text{etc.};$$

et l'on aura

$$\sqrt{d^2+\mathrm{D}^2}$$

pour l'expression de la distance des points deux courbes dont il s'agit. Or, on verra par les mêmes raisonnements employés dans l'article XVI, que les constantes arbitraires qui entrent dans les équations $y=\varphi(x)$ $z=\Phi(x)$ étant déterminées de manière à satisfaire aux conditions $\frac{d.\varphi(x)}{dx}=\frac{d.f(x)}{dx}$, $\frac{d.\Phi(x)}{dx}=\frac{d.\mathrm{F}(x)}{dx}$, la seconde courbe aura avec la première un contact du premier ordre, et qu'aucune autre courbe ne pourrait en approcher davantage, à moins d'être assujettie aux mêmes conditions. On verra également que si l'on satisfait de plus aux équations $\frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2}=\frac{d^2.f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2.\Phi(x)}{dx^2}=\frac{d^2.\mathrm{F}(x)}{dx^2}$, les deux courbes auront un contact du second ordre, et qu'aucune autre courbe ne pourrait approcher davantage de la première, à moins d'être assujettie aux mêmes conditions. Et ainsi de suite.

232. Le contact d'une courbe quelconque avec un plan peut être considéré de la même manière. Les équations de la courbe proposée étant toujours

$$y=f(x),\qquad z=\mathrm{F}(x)$$

soit en général

$$z-z'=m(x-x')+n(y-y')$$

l'équation d'un plan quelconque passant par le point de la courbe dont les coordonnées sont $x'y'z'$. Si l'abscisse x' devient $x'+h$, on aura pour le point correspondant de la courbe

$$y=y'+\frac{dy'}{dx'}h+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.},\qquad z=z'+\frac{dz'}{dx'}h+\frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.};$$

et pour le point du plan qui répond aux abscisses $x+h$ et $y'+\frac{dy'}{dx'}h+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.}$,

$$z-z'=mh+n\left(\frac{dy'}{dx'}h+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.}\right).$$

Prenant maintenant la différence des valeurs de z qui appartiennent au plan et à la courbe, on trouve pour l'expression de la différence

$$\left(\frac{dz'}{dx'}-m-n\frac{dy'}{dx'}\right)h+\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}-n\frac{d^2y'}{dx'^2}\right)\frac{h^2}{2}+\text{etc.}$$

Si l'on veut donc en premier lieu que le plan soit tangent à la courbe, il faudra que les constantes m, n satisfassent à l'équation

$$\frac{dz'}{dx'}-m-n\frac{dy'}{dx'}=0;$$

et il est facile de reconnaître que cette équation exprime que le plan doit passer par la tangente à la courbe, en se rappelant ce qui a été dit n° 213, et ayant égard aux équations de la tangente données n° 224.

Cette équation ne suffit pas pour déterminer m et n, et

effectivement il existe une infinité de plans passant par la tangente qui tous touchent la courbe. Mais si l'on pose encore l'équation

$$\frac{d^2z'}{dx'^2}-n\frac{d^2y'}{dx'^2}=0,$$

on établira entre la courbe et le plan le contact le plus intime qu'il soit possible, aucun autre plan ne pouvant passer entre celui-ci et la courbe. On tire de cette seconde équation, réunie à la précédente,

$$n=\frac{\frac{d^2z'}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},\qquad m=\frac{\frac{dz'}{dx'}\frac{d^2y'}{dx'^2}-\frac{dy'}{dx'}\frac{d^2z'}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

ce qui donne pour l'équation du plan nommé *plan osculateur*, parce qu'il a un contact du second ordre avec la courbe,

$$\frac{d^2y'}{dx'^2}(z-z')=\left(\frac{dz'}{dx'}\frac{d^2y'}{dx'^2}-\frac{dy'}{dx'}\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)(x-x')+\frac{d^2z'}{dx'^2}(y-y').$$

233. Dans ce qui précède x est prise pour la variable indépendante, y et z sont regardées comme des fonctions de x. Si l'on veut regarder x, y, z, comme des fonctions d'une autre variable indépendante quelconque, on obtiendrait l'équation du plan osculateur qui convient à ce cas en remplaçant $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ et $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{d^2z'}{dx'^2}$ par les expressions données n° 74 pour le changement de la variable indépendante. Mais on y parviendra plus simplement en remarquant que l'équation générale d'un plan passant par le point de la courbe ayant pour coordonnées x', y', z' est

$$A(x-x')+B(y-y')+z-z'=0,$$

et donne pour ses deux équations différentielles du premier et du second ordre, en faisant également varier x, y et z,

$$Adx + Bdy + dz = 0$$
$$Ad^2x + Bd^2y + d^2z = 0.$$

Or, le plan sera le plan osculateur demandé si ces deux équations différentielles sont satisfaites par les valeurs dx', dy', dz' et d^2x', d^2y', d^2z' appartenant à la courbe Déterminant donc les constantes A et B par les deux équations

$$Adx' + Bdy' + dz' = 0$$
$$Ad^2x' + Bd^2y' + dz' = 0,$$

et substituant leurs valeurs dans l'équation générale précédente, il viendra

$$(dy'd^2z' - dz'd^2y')(x - x') + (dz'd^2x' - dx'd^2z')(y - y') + \\ + (dx'd^2y' - dy'd^2x')(z - z') = 0$$

pour l'équation du plan osculateur.

Si l'on prenait x pour la variable indépendante, on devrait supposer dans cette équation $d^2x' = 0$: on retrouverait ainsi celle qui a été donnée dans le numéro précédent.

234. Considérons maintenant le contact de la courbe à double courbure proposée avec une surface sphérique dont l'équation générale est

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = \rho^2,$$

α, β, γ désignant les coordonnées du centre, et ρ le rayon. Si cette surface passe par le point de la courbe dont x', y', z' représentent les coordonnées, on aura

$$(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 + (\gamma - z')^2 = \rho^2.$$

De plus si elle touche la courbe l'équation différentielle du premier ordre déduit de celle-ci en faisant varier seulement x', y', z', qui est

$$(\alpha-x')\,dx'+(\beta-y')dy'+(\gamma-z')dz'=0,$$

devra être satisfaite par les valeurs de dx', dy', dz' appartenant aux points de la courbe. Ainsi toute surface sphérique déterminée de manière que α, β, γ et ρ satisfassent à ces deux équations touchera la courbe proposée. On voit d'ailleurs par le n° 225 que la seconde de ces équations indique que le centre de la surface sphérique doit se trouver sur le plan normal à la courbe proposée.

235. Si la surface sphérique a un contact du second ordre avec la courbe proposée, il faudra que l'équation différentielle du second ordre déduite de la précédente, qui est

$$dx'^2+dy'^2+dz'^2-(\alpha-x')\,d^2x'-(\beta-y')\,d^2y'-(\gamma-z')\,d^2z'=0,$$

soit encore satisfaite par les valeurs des différentielles de x', y', z', tirées des équations de la courbe. Supposant donc ces différentielles déterminées de cette manière, toute surface sphérique pour laquelle α, β, γ et ρ satisferont aux équations précédentes aura un contact du second ordre avec la courbe proposée. Il est évident, d'ailleurs, que la dernière équation qui vient d'être obtenue étant déduite par la différentiation de l'équation du plan normal à la courbe, et passant par le point dont les coordonnées sont x', y', z', cette même équation appartient au plan normal à la courbe passant par le point dont les coordonnées sont $x'+dx'$, $y'+dy'$, $z'+dz'$.

On en conclut que le centre de la sphère osculatrice doit être situé sur la ligne droite, qui est l'intersection des deux plans normaux appartenant à deux points de la courbe, dont la distance est supposée plus petite que toute grandeur donnée.

236. Si, par le centre d'une sphère tangente à une courbe proposée au point m, et par la tangente menée à la courbe, au même point, on fait passer un plan, ce plan coupera évidemment la sphère suivant un grand cercle qui sera également tangent à la courbe. Ainsi une courbe quelconque a une infinité de cercles tangents dont les centres sont tous placés, sur le plan normal, à cette courbe.

Parmi toutes les sphères tangentes à la courbe proposée, nous distinguons les sphères osculatrices, dont les centres sont placés sur l'intersection commune de deux plans normaux consécutifs; mais, de plus, parmi les sphères osculatrices, nous distinguerons celle de ces sphères dont le rayon est le plus petit de tous, et dont le centre est situé dans le plan osculateur mené au point m de la courbe proposée. Le grand cercle suivant lequel cette sphère est coupée par le plan osculateur est non-seulement tangent à la courbe proposée dans le point m, mais de plus il a en ce point un contact du second ordre avec cette courbe, puisqu'il est l'intersection commune de deux surfaces qui ont elles-mêmes avec la courbe un contact du second ordre. Par conséquent ce cercle est le *cercle osculateur* de la courbe proposée, et il en mesure la courbure. On obtiendra évidemment le cercle osculateur dont il s'agit si aux conditions établies ci-dessus pour la détermination des quantités α, 6, γ, ρ,

on ajoute celle que l'équation du n° 233 soit satisfaite quand on suppose $x=\alpha$, $y=6$, $z=\gamma$. Ainsi, les coordonnées du centre et le rayon du cercle osculateur seront donnés par les quatre équations

$$(\alpha-x)^2+(6-y)^2+(\gamma-z)^2=\rho^2$$
$$dx(\alpha-x)+dy(6-y)+dz(\gamma-z)=0$$
$$ds^2-d^2x(\alpha-x)-d^2y(6-y)-d^2z(\gamma-z)=0$$
$$X(\alpha-x)+Y(6-y)+Z(\gamma-z)=0.$$

Nous supprimons les accents pour plus de simplicité ; nous remplacerons $dx^2+dy^2+dz^2$ par sa valeur ds^2 ; et nous posons pour abréger

$$X=dyd^2z-dzd^2y,\quad Y=dzd^2x-dxd^2z,\quad Z=dxd^2y-dyd^2x.$$

On en déduit par l'élimination

$$\alpha-x=\frac{ds^2(Ydz-Zdy)}{X^2+Y^2+Z^2}$$
$$6-y=\frac{ds^2(Zdx-Xdz)}{X^2+Y^2+Z^2}$$
$$\gamma-z=\frac{ds^2(Xdy-Ydx)}{X^2+Y^2+Z^2}$$
$$\rho=\frac{ds^2\sqrt{(Ydz-Zdy)^2+(Zdx-Xdz)^2+(Xdy-Ydx)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned}Ydz-Zdy&=(dzd^2x-dxd^2z)dz-(dxd^2y-dyd^2x)dy\\&=(dx^2+dy^2+dz^2)d^2x-dx(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)\\&=ds^2d^2x-dxds\,d^2s=ds^3.d\left(\frac{dx}{ds}\right);\end{aligned}$$

de même

$$Zdx-Xdz=ds^2d^2y-dydsd^2s=ds^3.d\left(\frac{dy}{ds}\right)$$

$$Xdy-Ydx=ds^2d^2z-dzdsd^2s=ds^3.d\left(\frac{dz}{ds}\right);$$

et par conséquent

$$(Ydz-Zdy)^2+(Zdx-Xdz)^2+(Xdy-Ydx)^2=ds^4\left[(d^2x)^2+\right.$$
$$\left.+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2\right].$$

De plus on trouve également

$$X^2+Y^2+Z^2=ds^2\left[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2\right].$$

Ainsi, les expressions précédentes peuvent s'écrire

$$\alpha-x=\frac{ds^3.d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}$$
$$\beta-y=\frac{ds^3.d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}$$
$$\gamma-z=\frac{ds^3.d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}$$
$$\rho=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}.$$

Ces expressions conviendront au cas particulier où l'on prendrait l'arc s pour la variable indépendante, c'est-à-dire ds pour différentielle constante, en faisant $d^2s=0$, et par conséquent remplaçant $d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dz}{ds}\right)$ par $\frac{d^2x}{ds}$, $\frac{d^2y}{ds}$, $\frac{d^2z}{ds}$.

237. On peut d'ailleurs parvenir directement à ces expressions en étendant à une courbe quelconque les notions qui ont été présentées dans le n° 185, pour le cas d'une courbe tracée dans un plan. Considérant trois points consécutifs de la courbe, savoir, le point l (*fig.* 42),

dont les coordonnées sont x, y, z; le point m, dont les coordonnées sont $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$; et le point n, dont les coordonnées sont $x+2dx+d^2x$, $y+2dx+dy$, $z+2dz+d^2z$. Dans l'intervalle lm, représenté par ds, la courbe est regardée coïncidant avec la tangente menée au point l, et dans l'intervalle mn, représenté par $ds+d^2s$, la courbe est regardée comme coïncidant avec la tangente menée au point m. Le plan qui contient les deux tangentes lm, mn, est le plan osculateur mené à la courbe au point l. Si l'on prolonge lm d'un intervalle $mc=lm$, et si l'on décrit du point m comme centre l'arc infiniment petit ce, l'intervalle en représentera d^2s. De plus on pourra regarder ce comme une ligne droite, et suppposer droits les angles que cette ligne forme avec mc et mn, puisqu'ils ne diffèrent d'un angle droit que d'une quantité infiniment petite. Enfin le rapport $\frac{ce}{cm}$ donne la valeur de l'angle de contingence. (voyez n° 182), en sorte que

$$\frac{ce}{cm}=\frac{ds}{\rho}, \quad \text{ou} \quad \rho=\frac{ds^2}{ce},$$

ρ désignant toujours le rayon de courbure. Cela posé, si l'on remarque que les coordonnées du point c sont $x+2dx$, $y+2dy$, $z+2dz$, on voit que les projections de cn sur les axes des x, des y et des z sont d^2x, d^2y, d^2z. Donc

$$cn=\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2},$$

et par conséquent

$$ce=\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2};$$

d'où résulte

$$\rho=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}.$$

Pour déterminer maintenant la direction du rayon de courbure, qui est parallèle à *ce*, on remarquera que les cosinus des angles formés par *lm* avec les axes sont respectivement $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; et que les cosinus des angles formés par *mn* avec les axes sont $\frac{dx}{ds}+d\left(\frac{dx}{ds}\right), \frac{dy}{ds}+d\left(\frac{dy}{ds}\right), \frac{dz}{ds}+d\left(\frac{dz}{ds}\right)$. Mais si, dans le triangle *mce*, *mc* et *me* étaient égaux à l'unité, les projections de ces lignes sur chaque axe seraient égales aux cosinus des angles qu'elles forment avec l'axe. Les projections de *ce* seraient donc égales aux différences de ces cosinus; d'où il résulte qu'en multipliant ces différences par *cm*, ou *ds*, on aura les projections de *ce*. Ainsi représentant comme ci-dessus par λ, μ, ν, les angles formés par le rayon de courbure avec les axes des x, des y et des z, on a

$$ce.\cos.\lambda=ds.d\left(\frac{dx}{ds}\right),\ ce.\cos.\mu=ds.d\left(\frac{dy}{ds}\right),\ ce.\cos.\nu=ds.d\left(\frac{dz}{ds}\right);$$

ou puisque $ce=\frac{ds^2}{\rho}$,

$$\cos.\lambda=\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dx}{ds}\right),\ \cos.\mu=\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dy}{ds}\right),\ \cos.\nu=\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

238. On conclut d'ailleurs de ces équations

$$\frac{ce}{ds}=\frac{ds}{\rho}=\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2},$$

expression remarquable de l'angle de contingence dans une courbe à double courbure.

On voit également que l'expression du rayon de courbure ρ peut être présentée sous la forme

$$\rho=\frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}},$$

ce que l'on conclurait également des transformations qui ont été données au commencement du numéro 236.

Remarquons de plus que si nous représentons comme dans le n° 223 par α, β, γ les angles formés par la tangente menée à la courbe au point dont les coordonnées sont x, y, z; si nous appelons ω l'angle de contingence, et enfin si nous avons égard aux expressions de cos. α, cos. β, cos. γ, données n° 228, l'expression précédente se transformera en

$$\omega=\sqrt{(d.\cos.\alpha)^2+(d.\cos.\beta)^2+(d.\cos.\gamma)^2}.$$

Cette formule peut d'ailleurs être obtenue directement en remarquant que

$$\cos.\omega=\cos.\alpha(\cos.\alpha+d.\cos.\alpha)+\cos.\beta(\cos.\beta+d.\cos.\beta)+\cos.\gamma(\cos.\gamma+d.\cos.\gamma),$$

et que l'on a généralement $\cos.\omega=\cos.^2\frac{1}{2}\omega-\sin.^2\frac{1}{2}\omega$, d'où $1-\cos.\omega=2\sin.^2\frac{1}{2}\omega$. Donc

$$(2\sin.\tfrac{1}{2}\omega)^2=2-2\cos.\alpha(\cos.\alpha+d.\cos.\alpha)-2\cos.\beta(\cos.\beta+d.\cos.\beta)-2\cos.\gamma(\cos.\gamma+d.\cos.\gamma).$$

Or on peut mettre à la place du nombre 2 la quantité

$$\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma+(\cos.\alpha+d.\cos.\alpha)^2+(\cos.\beta+d.\cos.\beta)^2+(\cos.\gamma+d.\cos.\gamma)^2;$$

réduisant ensuite, et remarquant que l'angle ω étant supposé infiniment petit $(2 \sin. \frac{1}{2}\omega)^2 = \omega^2$, on retrouve la formule précédente. Cette formule exprime généralement l'angle infiniment petit compris entre les deux positions infiniment voisines d'une ligne dont les angles avec les axes sont exprimés par α, β, γ.

239. Les résultats précédents se rapportent à la *première courbure* de la courbe proposée, qui a lieu dans le sens du plan osculateur. Remarquons, maintenant, que deux plans osculateurs consécutifs comprennent entre eux un angle infiniment petit, qui donne la mesure de la *seconde courbure* de cette courbe. Soit Ω cet angle, et rappelons-nous que l'équation du plan osculateur, telle qu'elle est écrite dans le n° 236, étant

$$X(\alpha-x)+Y(\beta-y)+Z(\gamma-z)=0,$$

les cosinus des angles formés par la normale à ce plan avec les axes des x, des y et des z sont représentés respectivement, d'après le n° 216, par

$$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

L'angle Ω de deux plans osculateurs consécutifs étant égal à l'angle des deux normales à ces plans, nous aurons donc, d'après ce qu'on a vu dans le numéro précédent,

$$\Omega=\sqrt{\left(d.\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2+\left(d.\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2+\left(d.\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2},$$

ou en développant, et ayant égard aux réductions qui s'opèrent,

$$\Omega=\frac{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)(dX^2+dY^2+dZ^2)-(XdX+YdY+ZdZ)^2}}{X^2+Y^2+Z^2},$$

ou bien encore

$$\Omega=\frac{\sqrt{(XdY-YdX)^2+(ZdX-XdZ)^2+(YdZ-ZdY)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Mais on trouve facilement

$$dX=dyd^3z-dzd^3y,\quad dY=dzd^3x-dxd^3z,\quad dZ=dxd^3y-dyd^3x;$$

puis

$$\frac{XdY-YdX}{dz}=\frac{ZdX-XdZ}{dy}=\frac{YdZ-ZdY}{dx}=$$
$$dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y);$$

et par conséquent

$$\Omega=ds\frac{dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)}{(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2}.$$

Si l'on désigne par P le rapport de l'élément ds de l'arc de la courbe à l'angle Ω compris entre les deux plans osculateurs qui répondent aux points placés aux extrémités de cet élément, rapport que l'on nomme quelquefois le rayon de la seconde courbure, ou si l'on pose $\frac{ds}{P}=\Omega$, on aura donc

$$P=\frac{(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2}{dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)}.$$

La valeur du rayon de la seconde courbure dépend des différentielles du troisième ordre des coordonnées x, y, z.

tandis que celle du rayon de la première courbure dépend seulement des différentielles du second ordre.

240. Si l'on a pour tous les points d'une ligne quelconque l'équation

$$(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2=0,$$

ou (ce qui revient au même) l'équation

$$(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2=0,$$

il en résultera, d'après les nos 236 et 237, que le rayon ρ de la première courbure sera infini, ou que deux éléments consécutifs de la ligne comprendront toujours entre eux un angle nul, c'est-à-dire seront placés dans le prolongement l'un de l'autre. L'une et l'autre des équations précédentes expriment donc d'une manière générale la condition analytique à laquelle doivent satisfaire les valeurs des coordonnées x, y, z, pour qu'elles puissent appartenir à une ligne droite.

241. Si l'on a pour tous les points d'une ligne l'équation

$$dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)=0,$$

il en résultera, d'après le n° 239, que le rayon r de la seconde courbure est infini, ou que deux plans osculateurs consécutifs comprennent entre eux un angle nul, c'est-à-dire coïncidant l'un avec l'autre. Cette équation exprime donc, en général, la condition analytique à laquelle doivent satisfaire les valeurs des coordonnées x, y, z, pour qu'elles puissent appartenir à une courbe plane.

Développées.

242. D'après les n°s 234 et 235, si l'on veut qu'une sphère ait un contact du second ordre avec une courbe proposée dans le point dont les coordonnées sont x, y, z, il faudra que les coordonnées α, β, γ, du centre de la sphère, et son rayon ρ, satisfassent aux trois équations

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2=\rho^2$$
$$dx(\alpha-x)+dy(\beta-y)+dz(\gamma-z)=0$$
$$ds^2-d^2x(\alpha-x)-d^2y(\beta-y)-d^2z(\gamma-z)=0.$$

La détermination d'une sphère dépendant de quatre constantes, tandis que l'on doit satisfaire à trois équations seulement, il en résulte qu'il existe pour chaque point de la courbe proposée une infinité de sphères osculatrices. Toutes ces sphères ont, comme on l'a vu ci-dessus, leurs centres placés sur une ligne droite, qui est l'intersection des deux plans normaux consécutifs menés à la courbe proposée dans les deux points dont les coordonnées sont x, y, z, et $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Cette ligne droite est nécessairement perpendiculaire à la tangente menée à la courbe au point dont les coordonnées sont x, y, z.

On peut se représenter l'ensemble des plans normaux menés à tous les points de la courbure proposée, les lignes droites qui sont les intersections des plans normaux consécutifs, et la *surface développable* formée par l'ensemble de ces lignes droites. Chaque plan normal touche cette surface dans toute l'étendue de l'arête rectiligne appartenant à ce plan. Cette arête est perpendiculaire à la tangente menée au point de la courbe

proposée par laquelle passe le plan normal; et elle est le lieu des centres de toutes les sphères osculatrices appartenant à ce point. Ainsi l'on peut dire que la surface développable dont il s'agit, formée par les intersections successives des plans normaux de la courbe proposée, est le lieu des centres des sphères osculatrices de cette courbe. Si l'on se place en un point quelconque μ de la surface, et que l'on mène de ce point une normale à la courbe proposée qui la rencontre au point m, la sphère décrite du point μ comme centre, avec μm pour rayon, aura un contact du second ordre avec cette courbe.

D'après ce qui précède, on peut considérer dans les équations précédentes α, β, γ, comme des coordonnées variables appartenant à tous les points de la surface, lieu des centres des sphères osculatrices. On obtiendrait l'équation de cette surface en joignant aux équations

$$dx(\alpha-x)+dy(\beta-y)+dz(\gamma-z)=0$$
$$ds^2-d^2x(\alpha-x)-d^2y(\beta-y)-d^2z(\gamma-z)=0,$$

les deux équations de la courbe proposée. On aurait ainsi quatre équations au moyen desquelles on pourrait éliminer x, y, z : il resterait, après cette élimination, une équation en α, β, γ, qui serait l'équation cherchée.

243. Les équations précédentes subsistant toutes les fois que l'on donne à x, y, z des valeurs qui conviennent à un point de la courbe proposée, et que l'on donne en même temps à α, β, γ des valeurs qui conviennent à l'un quelconque des centres des sphères osculatrices qui appartiennent à ce point, on peut les différentier en

faisant varier à la fois x, y, z et α, β, γ. L'équation obtenue de cette manière appartiendra encore à la surface, lieu des centres des sphères osculatrices. En différentiant ainsi la première équation, et supprimant les termes qui sont nuls en vertu de la seconde, on a

$$dxd\alpha + dyd\beta + dzd\gamma = 0.$$

Cette équation différentielle met en évidence la nature de la surface dont il s'agit. Posons $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ et $d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$, on pourra la mettre sous la forme

$$\frac{dx}{ds}\frac{d\alpha}{d\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{d\beta}{d\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{d\gamma}{d\sigma} = 0;$$

et l'on voit qu'elle exprime que dans quelques sens que l'on se déplace sur la surface à partir du point α qui est le centre d'une sphère osculatrice appartenant au point m de la courbe proposée, l'élément rectiligne $d\sigma$, que l'on décrira, sera perpendiculaire à l'élément ds de cette courbe, qui est placé au point m. Cette propriété résulte effectivement de ce que la surface est touchée par le plan normal à la courbe au point m dans toute l'étendue de la ligne, qui est le lieu des centres des sphères osculatrices appartenant à ce point.

244. Considérons maintenant les lignes qui peuvent être des *développées* de la courbe proposée, celle-ci étant leur *développante*, en conservant à ces expressions le sens qui leur a été donné dans les n[os] 186 et suivants. On suppose toujours qu'un fil ayant été enveloppé sur une première courbe, on le développe en maintenant constamment ce fil tendu. Chaque point du fil décrit

alors une seconde courbe que l'on nomme développante, tandis que la première courbe est nommée développée. Le caractère géométrique de la développée consiste donc seulement dans ces deux circonstances : 1° que chaque point μ de la développée est le centre d'un cercle tangent au point correspondant m de la développante ; 2° que le rayon μm touche la développée au point μ.

D'après cela on reconnaît d'abord qu'une développée de la courbe proposée doit nécessairement se trouver sur la surface développable qui est le lieu des centres des sphères osculatrices. Car soit l, m, n, etc., plusieurs points contigus de la courbe proposée (*fig.* 42), et λ, μ, ν, etc., les points correspondants de la développée. Les points λ, μ, ν, etc., devant être les centres de cercles tangents à la courbe proposée en l, m, n, etc., devront se trouver respectivement sur les plans normaux menés à la courbe proposée aux points l, m, n, etc. Donc on passe d'un point de la développée à un autre, en passant d'un plan normal au plan normal contigu, c'est-à-dire en s'avançant sur la surface formée par les intersections successives des plans normaux. Si nous regardons les coordonnées α, β, γ non plus comme appartenant à un point quelconque de cette surface, mais à l'une des développées dont il s'agit, il faudra donc admettre en premier lieu que ces coordonnées satisfont aux équations

$$dx(\alpha-x)+dy(\beta-y)+dz(\gamma-z)=0$$
$$ds^2-d^2x(\alpha-x)-d^2y(\beta-y)-d^2z(\gamma-z)=0\,;$$

et de plus qu'elles satisfont à la condition que le rayon mené du point de la développée au point correspondant

de la courbe proposée soit tangent à la développée. Cette dernière condition s'exprimera en posant

$$\frac{d\alpha}{d\sigma}=\frac{\alpha-x}{\rho},\qquad \frac{d\beta}{d\sigma}=\frac{\beta-y}{\rho},\qquad \frac{d\gamma}{d\sigma}=\frac{\gamma-z}{\rho},$$

ou

$$\frac{d\alpha}{d\beta}=\frac{\alpha-x}{\beta-y},\qquad \frac{d\alpha}{d\gamma}=\frac{\alpha-x}{\gamma-z},\qquad \frac{d\beta}{d\gamma}=\frac{\beta-y}{\gamma-z}.$$

L'une quelconque de ces équations étant réunie aux deux précédentes et aux équations de la courbe proposée, on aura cinq équations, dont on pourra éliminer x, y, z. Il restera deux équations en α, β, γ, qui appartiendront à la développée. Mais il importe de remarquer que ces deux équations seront des équations différentielles. Ainsi, elles ne déterminent pas une certaine développée. Elles expriment d'une manière générale les caractères géométriques qui appartiennent à toutes les développées de la courbe proposée dont la surface développable qui contient les centres des sphères osculatrices est le lieu, et qui sont en nombre infini. Quant à la manière de déterminer en termes finis les équations d'une certaine développée passant par un point que l'on se serait donné arbitrairement sur la surface qui les contient toutes, cette recherche dépend du calcul intégral.

Il est visible, d'ailleurs, qu'en concevant la courbe proposée et la surface développable lieu des centres des sphères osculatrices existant dans l'espace, on pourrait facilement tracer sur la surface une développée quelconque de la courbe. En effet, attachant un fil au point l de la courbe, et maintenant ce fil tendu, on le dirigera de manière qu'il vienne toucher la surface; et il pourra la toucher en un point quelconque λ de la

droite appartenant à cette surface, qui est située dans le plan normal à la courbe au point l. On appliquera ensuite le fil sur la surface en le maintenant constamment tendu. La ligne obtenue de cette manière sera évidemment la développée. Elle sera une *ligne de plus courte distance* sur la surface développable; et si l'on développait cette surface elle deviendrait sur le développement une ligne droite.

245. Le tracé d'une développée peut encore s'opérer de la manière suivante : Soient l, m, n,... plusieurs points contigus de la courbe proposée. Ayant mené un premier rayon λl, on fera passer un plan par ce rayon et par l'élément lm de cette courbe; puis l'on marquera le point μ où ce plan coupe l'arête rectiligne de la surface développable qui est située dans le plan normal à la courbe proposée au point m. On mènera ensuite le rayon μm, on fera passer un second plan par ce rayon et par l'élément mn de la courbe, et l'on marquera le point ν où ce plan coupe l'arête rectiligne de la surface développable qui est située dans le plan normal à la courbe proposée au point n. En continuant de la même manière, les points λ, μ, ν,... donneront la courbe cherchée.

Supposons, ensuite, que l'on développe la surface développable. Tous les plans normaux se rabattront les uns sur les autres en tournant sur leurs intersections successibles, et par suite de ce rabattement la courbe proposée se trouvera réduite à un seul point, que nous désignerons par M. En effet l'arc lm de cette courbe est perpendiculaire au plan normal passant par le point m : donc dans le rabattement du plan normal, suivant

sur celui-ci, le point *m* viendra se placer sur le point *l*. De même l'arc *mn* de la courbe est perpendiculaire au plan normal passant par le point *m* : donc dans le rabattement du plan normal suivant sur celui-ci le point *n* viendra se placer sur le point *m*. Et ainsi de suite. Or il est évident par-là que tous les rayons λl, μm, νn, etc., viendront se rabattre les uns sur les autres, et se confondre en une seule ligne droite, puisque tous se coupent, et qu'ils devront tous passer par le point M. Ainsi, toutes les développées possibles de la courbe proposée deviennent sur le rabattement dont il s'agit des lignes droites émanant du point M dans lequel cette courbe s'est concentrée, ce qui s'accorde avec ce qui a été dit dans le numéro précédent.

246. Les centres de la première courbure de la courbe proposée, qui ont été déterminés dans les numéros 236 et suivants, sont nécessairement situés sur la surface développable lieu des centres des sphères osculatrices. Concevons l'ensemble des plans osculateurs de la courbe proposée : ils forment par leurs intersections successives une nouvelle surface développable, qui rencontre à angles droits la surface développable dont il a été question ci-dessus, et qui est formée par les intersections successives des plans normaux. La ligne d'intersection de ces deux surfaces est le lieu des centres de la première courbure.

On doit remarquer que cette ligne n'est point généralement une développée de la courbe proposée. Concevons, en effet, trois points consécutifs *l*, *m*, *n* de la courbe proposée, et les trois points correspondants λ, μ, ν, etc., de la courbe lieu des centres de la première cour-

bure, en sorte que $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, etc., sont respectivement les rayons de courbure appartenant aux points l, m, n, etc, de la courbe proposée. Si la ligne $\lambda\mu\nu$.... était une développée de lmn...., il faudrait que l'arc $\lambda\mu$ fut situé dans le prolongement du rayon $m\lambda$, l'arc $\mu\nu$ dans le prolongement du rayon $m\mu$, et ainsi de suite; ce qui suppose que le rayon $m\mu$ viendrait couper le rayon $l\lambda$ prolongé, que le rayon $n\nu$ viendrait couper le rayon $m\mu$ prolongé, et ainsi de suite. Or, cela ne pourrait arriver qu'autant que les rayons successifs $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, etc., seraient situés deux à deux dans un même plan, ce qui n'est point, puisque chacun de ces rayons est situé dans les plans osculateurs menés respectivement aux points l, m, n, etc., de la courbe proposée. Les rayons de courbure $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, etc., ne peuvent se rencontrer et former par leurs intersections successives une développée, qu'autant que la courbe proposée est plane, cas dans lequel tous les plans osculateurs coïncident avec le plan de la courbe.

La vérité de la remarque précédente deviendra encore plus palpable si l'on considère le rabattement dont il a été question dans le n° 245. En effet, chaque rayon de la première courbure de la courbe proposée est perpendiculaire à l'arête rectiligne correspondante de la surface développable lieu des centres des sphères osculatrices, et dans le rabattement des plans normaux les uns sur les autres, ce rayon de courbure et cette arête ne cesseront pas de se couper à angles droits. Donc les rayons $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, etc., de la première courbure de la courbe proposée ne seront autre chose sur le rabattement que les perpendiculaires abaissées du point M sur les inter-

sections successives des plans normaux. Donc ces rayons ne pourraient se confondre en une seule ligne droite (ce qui serait nécessaire pour que les points λ, μ, ν, etc., appartinssent à une développée), qu'autant que toutes les intersections seraient parallèles entre elles, ce qui ne peut avoir lieu à moins que tous ces plans osculateurs ne coïncident entre eux, c'est-à-dire à moins que la courbe proposée ne soit plane.

247. D'après le n° 235, la sphère dont le rayon ρ, et les coordonnées du centre α, β, γ, satisfont aux trois équations

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2=\rho^2 \quad \ldots \ldots \quad \text{(A)}$$
$$(\alpha-x)dx+(\beta-y)dy+(\gamma-z)dz=0 \quad \ldots \quad \text{(B)}$$
$$ds^2-(\alpha-x)d^2x-(\beta-y)d^2y-(\gamma-z)d^2z=0 \quad . \quad \text{(C)}$$

a un contact du second ordre avec une courbe à double courbure proposée dans le point de cette courbe auquel appartiennent les coordonnées x, y, z. Ces trois équations ne déterminant pas entièrement les quatre quantités ρ, α, β, γ, il existe une infinité de sphères osculatrices à la courbe proposée dont il s'agit. Toutes ces sphères ont leurs centres placés sur la ligne droite intersection des deux plans normaux menés à cette courbe par les points dont les coordonnées sont x, y, z, et $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Les équations (B) et (C) appartiennent respectivement à ces deux plans.

Si l'on continue l'opération par laquelle les deux équations (B), (C), ont été déduites de l'équation (A), c'est-à-dire, si l'on différentie l'équation (C) par rapport à x, y, z seules, on aura une quatrième équation

$$3dsd^2s-(\alpha-x)d^3x-(\beta-y)d^3y-(\gamma-z)d^3z=0. \quad \text{(D)}$$

qui, étant réunies aux précédentes, déterminera entièrement les quantités α, β, γ et ρ. La sphère pour laquelle les coordonnées du centre α, β, γ satisferont aux trois équations (B), (C) et (D) aura un contact du troisième ordre avec la courbe proposée dans le point de cette courbe dont les coordonnées sont x, y, z.

On doit remarquer d'ailleurs que les centres de toutes les sphères ayant un contact du troisième ordre avec la courbe proposée, se trouveront placés sur l'arête de rebroussement de la surface lieu des centres des sphères osculatrices qui est produite par les intersections successives des lignes droites, dont cette surface est le lieu. En effet les trois équations (B), (C), (D), lorsqu'on y regarde α, β, γ comme les variables, appartiennent aux trois plans normaux menés à la courbe proposée dans les points dont les coordonnées sont respectivement x, y, z; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$; et $x+2dx+d^2x$, $y+2dy+d^2y$, $z+2dz+d^2z$. Le système des deux équations (B), (C) appartiennent à l'intersection des deux premiers plans, et le système des deux équations (C), (D) appartient à l'intersection du second et du troisième plan. Ces trois équations réunies appartiennent donc au point commun à ces deux intersections, c'est-à-dire au point de l'arête de rebroussement dont nous venons de parler. Si l'on élimine x, y, z des équations (B), (C), (D) au moyen de deux équations de la courbe à double courbure proposée, les deux équations restantes en α, β, γ appartiendront à cette arête de rebroussement.

248. Une courbe à double courbure quelconque et l'arête du rebroussement de la surface développable qui est le lieu des centres de ses sphères osculatrices, ont

d'ailleurs une relation qu'il est utile de faire connaître. Remarquons, 1° que deux tangentes consécutives à l'arête de rebroussement sont perpendiculaires aux deux plans osculateurs consécutifs correspondants de la courbe proposée; car ces tangentes ne sont autre chose que les intersections des plans normaux à cette courbe; 2° que deux plans osculateurs consécutifs de l'arête de rebroussement sont perpendiculaires aux deux tangentes consécutives correspondantes de l'arête proposée; puisque ces deux plans osculateurs ne sont autre chose que les plans normaux à cette courbe. Donc, 1° ω désignant, comme dans le n° 238, l'angle de deux tangentes consécutives d'une courbe proposée, il désignera également l'angle des deux plans osculateurs consécutifs correspondants de l'arête de rebroussement de la surface lieu des centres des sphères osculatrices; et 2° Ω désignant, comme dans le n° 239, l'angle de deux plans osculateurs consécutifs de la courbe, il désignera également l'angle des deux tangentes consécutives correspondantes de cette arête de rebroussement. Ces propositions ont été données par M. Fourier.

Exemple de l'application des résultats précédents.

249. Considérons la courbe désignée sous le nom d'*hélice*, qui est tracée sur la surface d'un cylindre droit à la base circulaire, de manière à couper toutes les arêtes de cette surface sous le même angle. Soit R le rayon du cylindre, dont nous supposerons que l'axe coïncide avec l'axe des z, et représentons par a la tangente trigonométrique de l'angle constant formé par chaque élément de la courbe avec le plan des xy. Enfin

désignons par t l'angle compris entre le plan des xz et le rayon du cylindre mené au point de l'hélice, dont les coordonnées sont x, y, z. La nature de la courbe donne évidemment

$$x=R\cos.t, \quad y=R\sin.t, \quad z=Rat;$$

d'où l'on déduit pour les équations en x, y, z des projections de l'hélice sur les plans coordonnés

$$x^2+y^2=R^2, \quad z=Ra.\text{arc.cos.}\frac{x}{R}, \quad z=Ra.\text{arc.sin.}\frac{y}{R}.$$

Cela posé, si l'on veut déterminer en premier lieu la direction de la tangente menée à un point quelconque de la courbe, on aura, par les premières équations,

$$dx=-R\sin.t.dt, \quad dy=R\cos.t.dt, \quad dz=Ra.dt.$$

Donc

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\text{tang}.t}, \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{a}{\sin.t};$$

et substituant ces valeurs dans les formules du n° 223, il viendra

$$\cos.\alpha=-\frac{\sin.t}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos.6=\frac{\cos.t}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos.\gamma=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

ou si l'on veut

$$\cos.\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{y}{R}, \quad \cos.6=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{x}{R}, \quad \cos.\gamma=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

D'après cela les équations de la tangente seront

$$z-z'=-\frac{a}{\sin.t}(x-x'), \quad z-z'=\frac{a}{\cos t}(y-y'), \quad \frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{1}{\text{tang}.t};$$

et celle du plan normal

$$\sin.t(x-x')-\cos.t(y-y')-a(z-z')=0.$$

x', y', z' désignent les coordonnées du point de tangence m ; t est l'inclinaison sur l'axe des x du rayon $0m$ qui répond à ce point. Tous les plans normaux forment le même angle avec le plan des xy.

250. En second lieu, pour la détermination du plan osculateur et des rayons de courbure, on déduira des expressions précédentes

$$dx=-\mathrm{R}\sin.t.dt, \quad dy=\mathrm{R}\cos.t.dt, \quad dz=\mathrm{R}a.dt,$$

et prenant t pour la variable indépendante,

$$d^2x=-\mathrm{R}\cos.t.dt^2, \quad d^2y=-\mathrm{R}\sin.t.dt^2, \quad d^2z=0;$$
$$d^3x=\mathrm{R}\sin.t.dt^3, \quad d^3y=-\mathrm{R}\cos.t.dt^3, \quad d^3z=0;$$

et par suite

$$ds=\sqrt{1+a^2}.\mathrm{R}dt, \quad d^2s=0.$$

$$\frac{dx}{ds}=-\frac{\sin.t}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{dy}{ds}=\frac{\cos.t}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{dz}{ds}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Ainsi l'expression du rayon de la première courbure ρ du n° 236 donne ici

$$\rho=(1+a^2)\mathrm{R};$$

et les expressions de cos. λ, cos. μ, cos. ν du même numéro, qui déterminent la direction de ce rayon, donnent

$$\cos.\lambda=-\cos.t, \quad \cos.\mu=-\sin.t, \quad \cos.\nu=0;$$

d'où l'on conclut que le rayon de la première courbure appartenant à chaque point de la courbe est dirigé sui-

vant le rayon du cylindre mené à ce point. Ainsi, tous les centres de la première courbure sont placés sur une hélice qui a le même axe et le même pas que l'hélice proposée, mais qui est tracée sur un cylindre dont le rayon est a^2R.

L'équation du plan osculateur, n° 233, devient

$$a\sin.t(x-x')-a\cos.t(y-y')+z-z'=0.$$

Tous les plans osculateurs forment le même angle avec le plan des xy.

Quant à l'expression du rayon P de la seconde courbure, la formule du n° 239 donne

$$\rho=\frac{1+a^2}{a}\text{R};\quad \text{d'où}\quad \text{P}=\frac{\rho}{a},$$

et comme ce rayon est dirigé suivant la perpendiculaire au plan osculateur, les cosinus des angles qu'il forme avec les axes des x, des y et des z sont respectivement

$$\frac{a\sin.t}{\sqrt{1+a^2}},\quad -\frac{a\cos.t}{\sqrt{1+a^2}},\quad \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},$$

expressions qui indiquent une direction perpendiculaire à la fois à la tangente de la courbe déterminée par les angles α, 6, γ, et au rayon de la première courbure déterminé par les angles λ, μ, ν.

Si l'on désignait par Ψ l'angle constant formé par la tangente de la courbe avec le plan des xy, on aurait tang. $\Psi=a$, et les expressions précédentes s'écriraient plus simplement

$$\cos.\alpha=-\cos.\Psi.\sin.t,\quad \cos.6=\cos.\Psi.\cos.t,\quad \cos.\gamma=\sin.\Psi.$$

$$\rho=\frac{\text{R}}{\cos.^2\Psi},\quad \text{P}=\frac{\text{R}}{\sin.\Psi.\cos.\Psi}.$$

251. Considérons maintenant la surface développable qui est le lieu des centres des sphères osculatrices de la courbe proposée. Le cercle dont le rayon est $0m = R$ étant (*fig.* 43) la base de l'hélice proposée (qui se projette en $m'n'$ sur le plan des xz), le cercle dont le rayon $0\mu = (1+a^2)R$ sera (la figure est tracée pour le cas où a est > 1) la base de l'hélice lieu des centres de la première courbure qui se projette en $\mu'\nu'$ sur le plan des xz. $m\mu$ et $m'\mu'$ seront les deux projections du rayon de première courbure appartenant au point de l'hélice proposée dont les projections sont m,m'. Cela posé, la surface développable qui contient les centres des sphères osculatrices n'est autre chose que le lieu des intersections successives des plans normaux à l'hélice proposée menés *par tous* les points de cette courbe. Et comme tous ces plans forment le même angle avec le plan des xy, la surface qui est lieu de leurs intersections successives est une *surface hélicoïde*, cette dénomination étant appliquée à toute surface décrite par le mouvement d'une ligne ou d'une autre surface dont un point parcourt une hélice, tandis que les parties de la ligne ou de la surface tournent autour de l'axe de cette hélice. De plus, les intersections successives dont il s'agit ont toutes un point placé dans l'hélice projeté en μ',ν', qui est le lieu des centres de la première courbure de l'hélice proposée. Toutes forment le même angle avec le plan des xy, et elles sont toutes perpendiculaires au rayon du cylindre sur lequel l'hélice projetée en $\mu'\nu'$ est tracée. Donc elles ne sont autre chose que les tangentes de cette hélice, qui est le lieu de leurs intersections successives, c'est-à-dire l'arête de rebroussement de la surface développable. $\mu\tau$ et $\mu'\tau'$ re-

présentent sur la figure les projections de la tangente au point μ, μ'. Les points τ où ces tangentes rencontrent le plan des xy forment sur ce plan une courbe composée de deux branches $\tau\sigma$, $\tau'\sigma'$ qui sont des développantes du cercle dont 0μ est le rayon. On voit par ce qui précède que la surface développable lieu des centres des sphères osculatrices est partagée en deux nappes distinctes par l'hélice lieu des centres de la première courbure qui est son arête de rebroussement. Ces deux nappes ne pénètrent point dans le cylindre dont 0μ est le rayon, mais elles s'étendent à l'infini dans tous les sens au dehors de ce cylindre dont elles rencontrent la surface à angles droits.

On peut trouver l'équation de la surface lieu des centres des sphères osculatrices conformément à ce qui a été dit à la fin du n° 242. Si dans les équations

$$dx(\alpha-x)+dy(6-y)+dz(\gamma-z)=0$$
$$ds^2-d^2x(\alpha-x)-d^2y(6-y)-d^2z(\gamma-z)=0,$$

qui appartiennent à deux plans normaux consécutifs de l'hélice proposée, on met pour x, y, z, et leurs différentielles, les valeurs précédentes en t, il viendra

$$\alpha\sin.t-6\cos.t=a(\gamma-\text{R}at)$$
$$\alpha\cos.t+6\sin.t=-a^2\text{R}.$$

Le système de ces deux équations représente évidemment la ligne d'intersection des deux plans normaux consécutifs menés au point de l'hélice proposée projeté en m, m', c'est-à-dire la tangente menée au point projeté en μ, μ' à l'hélice lieu des centres de la première courbure. La seconde, qui ne contient que α et 6, est l'équation de

la projection de cette tangente sur le plan des xy; et on reconnaît aisément qu'elle appartient à la tangente $\mu\tau$, menée par le point μ au cercle dont le rayon est 0μ ou a^2R, conformément à ce qui a été dit ci-dessus.

Si l'on élimine t entre ces deux équations, le résultat conviendra à toutes les lignes d'intersection qu'elles représentent, ou à la surface développable qui en est le lieu. Pour effectuer cette élimination, on ajoutera les équations après les avoir élevées au carré, ce qui donnera

$$\alpha^2+6^2=a^4R^2+a^2(\gamma-Rat)^2,$$

d'où l'on déduit

$$t=\frac{\gamma}{aR}\mp\sqrt{\frac{\alpha^2+6^2}{a^4R^2}-1};$$

et en mettant cette valeur dans la seconde équation il viendra

$$\alpha.\cos.\left(\frac{\gamma}{aR}\mp\sqrt{\frac{\alpha^2+6^2}{a^4R^2}-1}\right)+6.\sin.\left(\frac{\gamma}{aR}\mp\sqrt{\frac{\alpha^2+6^2}{a^4R^2}-1}\right)+a^2R=0$$

pour l'équation demandée de la surface développable.

Remarquons que si l'on fait $\gamma=0$ dans l'équation précédente $\alpha^2+6^2=a^4R^2+a^2(\gamma-Rat)^2$, le résultat, qui est

$$\alpha^2+6^2=(a^2R)^2+(a^2R.t)^2,$$

appartiendra aux points τ, où les intersections successives des plans normaux qui répondent à chaque valeur de l'angle t, et qui forment la surface développable, rencontrent le plan des xy. Or $\sqrt{\alpha^2+6^2}$. représentant la distance 0τ, tandis que a^2R est représenté par 0μ, on conclut que la distance $\mu\tau$ doit être égale au développement

de l'arc t dans le cercle dont le rayon est a^2R, ou que la courbe $\tau\sigma$ doit être une développante de ce cercle, comme on l'a dit ci-dessus.

252. Si l'on veut, enfin, connaître les développées de l'hélice, qui sont situées sur la surface développable dont il vient d'être question, on y parviendra de la manière suivante. Soit comme ci-dessus un point quelconque de l'hélice proposée projeté en m (*fig.* 44) sur le plan des xy, et en m' sur le plan des xz, et le centre de la première courbure de l'hélice correspondant à ce point, qui est projeté en μ, μ'. Considérons l'ensemble des plans normaux menés à l'hélice proposée, et supposons que l'on rabatte tous ces plans, en les faisant tourner autour de leurs intersections successives, sur le plan normal mené par le point m, m'. D'après ce qui a été dit n° 245 l'hélice proposée se réduira dans ce rabattement à un seul point m'', et comme toutes les distances $m\mu$ sont égales entre elles, l'hélice lieu des centres de la première courbure se rabattra sur une circonférence de cercle décrite du point m'' comme centre avec le rayon $m''\mu'' = m\mu$. Toutes les révolutions de cette dernière hélice se trouveront développées et rabattues les unes sur les autres, suivant leur véritable longueur, sur la circonférence de cercle dont il s'agit.

Cela posé, admettons que l'on veut déterminer la développée dont le premier point est projeté en μ, μ', et rapporté en μ'' sur le rabattement. Conformément à ce qu'on a vu n° 245, cette développée sera représentée sur le rabattement par la ligne droite $m''\mu''$ qu'il faut prolonger à l'infini dans les deux sens. Si l'on veut donc trouver un point quelconque de la développée dont il

s'agit, on considérera que les arêtes rectilignes de la surface développable, c'est-à-dire les tangentes de l'hélice lieu des centres de courbure, sont représentées sur le rabattement par les tangentes au cercle dont le rayon est $m''\mu''$. Si donc on marque sur cette hélice le point correspondant au point e (c'est-à-dire le point qui est situé au-dessous du point μ, μ' à une distance mesurée sur l'hélice égale à l'arc $\mu''e$); si l'on mène en ce point une tangente à l'hélice, et si l'on porte sur cette tangente la distance ef, on aura le point cherché de la développée.

Pour construire d'abord de cette manière la partie de la développée commençant au point μ, μ' qui se trouve placée sur la nappe supérieure de la surface développable, on tracera donc les tangentes de la partie de l'hélice projetée en $\mu l, \mu' l'$, et rabattre en $\mu'' l''$. Or, la tangente menée au point l'' sur le rabattement ne rencontre plus la ligne $m''\mu''$ prolongée. Donc si le point l, l' de l'hélice est situé à une distance du point μ, μ' mesurée sur cette hélice égale à la longueur du quart de circonférence $\mu''el''$, on est assuré que la portion de courbe dont il s'agit, projetée en μa, $\mu' a'$, devient à une distance infinie parallèle à la tangente de l'hélice menée au point l, l'. Elle a donc pour asymptote la ligne LA, L'A' menée parallèlement à cette tangente par le point L,L' de l'hélice proposée qui est diamétralement opposé au point l, l'. Le point L,L' termine l'arc mL, m'L' de l'hélice proposée qui peut être décrit par le développement de la portion de courbe μa, $\mu' a'$.

Si l'on veut en second lieu construire la partie de la développée commençant au point μ, μ' qui se trouve

placée sous la nappe inférieure de la surface développable, on emploiera les tangentes de la partie de l'hélice projetée en μn, $\mu' n'$ et rabattue en $\mu'' n''$, en portant sur chaque tangente la longueur gh en contrebas du point de tangence. On obtiendra de cette manière la portion de courbe μb, $\mu' b'$. Et comme la tangente menée sur le rabattement au point n'' ne rencontre plus la ligne $m'' \mu''$ prolongée, il s'ensuit qu'ayant marqué sur l'hélice le point n, n' qui est situé à une distance du point μ égale à la longueur du quart de circonférence $\mu'' g n''$, la courbe μb, μ, b' tend à devenir à l'infini parallèle à la tangente de l'hélice menée au point n, n'. Cette courbe aura donc pour asymptote une parallèle à cette tangente menée par le N,N' de l'hélice proposée, qui est diamétralement opposé au point n, n'. Le point N,N termine l'arc mN, m'N' de l'hélice proposée qui peut être décrit par le développement de la portion de courbe μb, $\mu' b'$.

Les deux portions de courbe μa, $\mu' a'$ et μb, $\mu' b'$ forment deux branches distinctes de la développée, réunies au point μ, μ' qui est un point de rebroussement.

Pour continuer à tracer cette courbe, et trouver la branche dont le développement pourrait décrire l'arc de l'hélice proposée qui est au-dessus du point N,N' il faudra construire les tangentes à la portion np, $n'p'$ de l'hélice lieu des centres de courbure, qui est rabattue en $n'' i p''$, puis porter de bas en haut sur ces tangentes, à partir du point de tangence, les longueurs ik. Or, il est visible que si l'arc d'hélice np, $n'p'$ est égal en longueur au quart de circonférence $n'' i p''$, cette opération donnera la portion de courbe pc, $p'c'$, parfaitement égale

aux précédentes, ayant pour asymptote le prolongement NC, N'C' de la ligne NB, N'B'.

La même construction donnera ensuite par les tangentes de la portion pq, $p'q'$ de l'hélice lieu des centres de courbure, qui est rabattue sur le quart de cercle $p''q''$, la portion de courbe pd, $p'd'$, qui est réunie en p,p' à la précédente par un point de rebroussement. Et ainsi de suite.

On voit par ce qui précède que la développée de l'hélice proposée est formée d'une infinité de branches parfaitement égales entre elles, placées alternativement sur les nappes supérieure et inférieure de la surface développable qui est le lieu des centres des sphères osculatrices. Chaque branche est réunie à la précédente par un point de rebroussement, et à la suivante par une asymptote qui leur est commune. Les points de rebroussement sont placés sur l'hélice lieu des centres de courbure, à des intervalles égaux à la longueur du demi-cercle dont le rayon est égal au rayon de courbure $(1+a^2)R$.

253. Pour appliquer à l'hélice les notions présentées dans le n° 247, on remarquera qu'à l'égard de cette courbe les trois équations (B), (C), (D) de ce numéro deviennent respectivement, lorsqu'on y remplace x, y, z et leurs différentielles par leurs valeurs en t,

$$\alpha \sin.t - 6\cos.t = a(\gamma - Rat)$$
$$\alpha\cos.t + 6\sin.t = -a^2R$$
$$\alpha\sin.t - 6\cos.t = 0\,;$$

et qui se réduisent aux deux suivantes :

$$\alpha\cos.t + 6\sin.t = -a^2R \qquad \text{et} \qquad \gamma = Rat.$$

Elles représentent évidemment une hélice dont le rayon est a^2R, dont le pas est égal au pas de l'hélice proposée, et qui est placée dans une position opposée à cette dernière. Ces caractères appartiennent à la courbe qui est le lieu des centres de la première courbure de l'hélice proposée, comme on l'a trouvée dans le n° 250; et l'on a vu effectivement dans le n° 251 que cette courbe était l'arête de rebroussement de la surface lieu des centres de la première courbure.

Ainsi les sphères dont le rayon mesure la première courbure de la courbe proposée, et qui n'ont en général qu'un contact du second ordre avec cette couche, ont dans le cas particulier de l'hélice un contact du troisième ordre.

Quant à la proposition du n° 248 on remarquera que $\omega=\frac{ds}{\rho}$, $\Omega=\frac{ds}{\mathrm{P}}$; et que d'après les valeurs de ds, ρ et P données n° 250, on a par conséquent pour l'hélice proposée

$$\omega=\frac{dt}{\sqrt{1+a^2}},\qquad \Omega=\frac{adt}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Or l'arête de rebroussement de la surface lieu des centres des sphères osculatrices est ici une seconde hélice dont le rayon est a^2R et dont le pas est égal à celui de l'hélice proposée; d'où il suit qu'en appelant a' la valeur de a qui conviendrait à cette seconde hélice, on doit avoir $a'=\frac{1}{a}$. Mais si l'on écrit $\frac{1}{a}$ à la place de a dans les expressions précédentes, elles deviennent respectivement

$$\omega=\frac{adt}{\sqrt{1+a^2}},\qquad \Omega=\frac{dt}{\sqrt{1+a^2}},$$

en sorte que la valeur de l'angle ω appartenant à la courbe ne diffère pas de la valeur de l'angle Ω appartenant à l'arête de rebroussement, et réciproquement la valeur de l'angle Ω qui appartient à la courbe ne diffère pas de la valeur de l'angle ω qui appartient à l'arête de rebroussement; ce qui est conforme aux propositions énoncées.

XXIII. INTÉGRATION DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES LES PLUS SIMPLES D'UNE SEULE VARIABLE.

254. Une fonction différentielle du premier ordre d'une seule variable x est représentée en général par

$$Xdx,$$

X désignant une fonction quelconque de x. Cette fonction différentielle est toujours le résultat de l'opération de la différentiation appliquée à une certaine fonction y de la variable x, en sorte que l'on a

$$dy = Xdx \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = X\,;$$

ou du moins on peut toujours la regarder comme le résultat d'une telle opération. L'opération désignée sous le nom d'*intégration* consiste à trouver la fonction y lorsque la différentielle Xdx est donnée, ou en général à trouver une fonction de x qui, étant différentiée, donne pour sa différentielle Xdx.

La fonction y de la variable x qui, étant différentiée, donne pour résultat la différentielle proposée Xdx, est nommée l'*intégrale* de cette différentielle. De plus on désigne l'intégrale de la fonction différentielle $X\,dx$ par

le $\int$ placé au-devant de Xdx. Ainsi, l'équation précédente

$$dy=Xdx$$

étant posée, elle entraîne la suivante :

$$y=\int Xdx,$$

et réciproquement. Mais il importe de remarquer que si l'on avait trouvé une fonction de x, qui, étant différentiée, donnât pour résultat Xdx, on pourrait ajouter à cette fonction une constante quelconque C, sans qu'elle cessât de donner Xdx par sa différentiation. Si donc la fonction qu'il s'agit de trouver ne nous est connue que par cette seule condition qu'en la différentiant l'on doit trouver pour résultat Xdx, nous devons, pour en former l'expression générale, comprendre dans cette expression le terme constant et arbitraire C. D'après cela, y représentant l'*intégrale* de la fonction différentielle proposée Xdx, nous écrirons généralement

$$y=C+\int Xdx.$$

Dans cette équation $\int Xdx$ représente le résultat immédiat de l'*intégration*, c'est-à-dire la fonction de x qui, étant différentiée, donnera Xdx pour sa différentielle. C est la *constante arbitraire* qui doit être ajoutée à cette fonction pour donner à l'expression de l'intégrale y la généralité nécessaire, Au moyen de l'addition de cette constante on est assuré que y comprend toutes les expressions analytiques formées de la variable x qui, étant différentiées, donnent Xdx pour leur différentielle commune ; car on ne pourrait ajouter à $\int Xdx$ qu'une quan-

tité dont la fonction dérivée fût nulle, c'est-à-dire une constante.

Tant que l'intégrale y n'est définie que par cette seule condition d'avoir Xdx pour différentielle, la constante C demeure entièrement arbitraire. Mais dans toutes les questions qui dépendent du calcul intégral, il existe toujours des conditions d'après lesquelles on peut fixer la valeur de cette constante et parvenir à un résultat déterminé.

255. Ce n'est pas sans raison que l'on a affecté l'expression Xdx de l'initiale du mot *somme* pour exprimer la fonction dont la différentielle est Xdx. En effet une fonction quelconque peut toujours être regardée comme la somme d'un nombre infini de valeurs de sa différentielle. Pour le montrer clairement, nous reprendrons la considération, déjà employée dans d'autres occasions, des valeurs successives

$$x_0, x_0+\Delta x, x_0+2\Delta x, x_0+3\Delta x, \ldots\ldots\ldots x_0+(n-1)\Delta x, x_0+n\Delta x,$$

attribuées à la variable indépendante x, Δx étant regardée comme une différence constante, et des valeurs correspondantes

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots y_{n-1}, y_n$$

affectées par une fonction y de cette variable. Les différences de deux valeurs consécutives de y étant exprimées par Δy_0, Δy_1, $\Delta y_2 \ldots \Delta y_{n-1}$, nous avons évidemment (pourvu que depuis $x=0$ jusqu'à $x=x_n$ la fonction y ne prenne pas de valeurs infinies)

$$y_n=y_0+\Delta y_0+\Delta y_1+\Delta y_2+\Delta y_3+\ldots\ldots\ldots+\Delta y_{n-1}$$

expression qui peut s'écrire

$$y_n = y_0 + \left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_3}{\Delta x} + \ldots\ldots + \frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

Admettons maintenant que la différence Δx diminue de plus en plus en s'approchant de zéro, et que le nombre n augmente dans le même rapport, en sorte que $n\Delta x$ ne change point. Le nombre des termes compris dans la parenthèse augmentera de plus en plus, et la valeur de l'un quelconque $\frac{\Delta y_i}{\Delta x}$ de ces termes tendra à se confondre avec la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ qui répond à la valeur $x_0 + i\Delta x$ de la variable x. D'où l'on voit qu'à mesure que Δx diminue la quantité

$$\left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_3}{\Delta x} + \ldots\ldots + \frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x}\right)\Delta x$$

s'approche d'une limite qui est la somme des valeurs en nombre infini que prend la différentielle $\frac{dy}{dx}dx$ de la fonction proposée, lorsqu'on fait croître la variable indépendante x par l'intervalle constant et infiniment petit dx, depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_0 + n\Delta x$. On en conclut que l'on passe de la valeur quelconque y_0 de la fonction à une autre valeur quelconque y, en ajoutant à y_0 la somme des valeurs que prend la différentielle $\frac{dy}{dx}dx$ dans l'intervalle compris entre les valeurs x_0 et x qui répondent à y_0 et y.

Si nous représentons donc comme ci-dessus par $\mathrm{X}dx$ la différentielle de la fonction y, c'est-à-dire $\frac{dy}{dx}dx$, nous pourrons écrire à la place de l'équation précédente

$$y = y_0 + \int_{x_0} \mathrm{X}dx.$$

Le signe $\int_{x_0}$ indique que l'on a fait la somme des valeurs de la différentielle Xdx qui répondent à toutes les valeurs x_0, x_0+dx, x_0+2dx, x_0+3dx, etc., jusqu'à la valeur $x_0+(n-1)dx$ qui précède la valeur x correspondante à la valeur y de la fontion qui est dans le premier membre. En écrivant x_0 au bas du signe d'intégration $\int$, on spécifie la valeur particulière de x correspondante à y_0 à partir de laquelle la somme est prise.

L'équation précédente subsiste d'ailleurs quelles que soient les valeurs correspondantes x_0 et y_0; et si l'on avait simplement donné une différentielle Xdx sans spécifier à partir de quelle valeur x_0 de la variable indépendante on voulait sommer les valeurs de cette différentielle, ni quelle était la valeur correspondante y_0 de la fonction, il n'existerait aucun moyen de les déterminer. Donc en considérant dans l'équation précédente la fonction y comme étant assujettie à cette seule condition d'avoir Xdx pour différentielle, il faut y regarder x_0 comme arbitraire aussi bien que y_0. Il est donc inutile de marquer la valeur indéterminée de x à partir de laquelle la somme $\int Xdx$ est prise, et l'on peut écrire comme dans le numéro précédent

$$y = C + \int Xdx.$$

256. L'indétermination de la valeur de l'intégrale y, et la nécessité d'en compléter l'expression par l'addition d'une constante arbitraire, paraîtront bien évidentes si l'on considère x comme l'abscisse d'une courbe plane dont y représente l'ordonnée. En effet, lorsque la fonction y est donnée explicitement ou implicitement en x, la figure de la courbe est entièrement déterminée. Mais

il n'en est pas de même lorsqu'on donne seulement la différentielle $dy = Xdx$, ou le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx} = X$ de la fonction dont il s'agit. L'expression de ce coefficient différentiel détermine simplement la direction de la tangente de la courbe qui a lieu pour chaque point correspondant à une valeur donnée de x. Si l'on conçoit qu'une courbe *mm* a été tracée de manière à satisfaire à cette condition $\frac{dy}{dx} = X$, et qu'ensuite on la déplace en faisant décrire à tous ses points des parallèles à l'axe des y, elle satisfera encore à cette même condition dans toutes les positions *mm*, *mm* qu'elle occupera ; et il n'y aura aucune raison pour choisir une de ces positions plutôt que toute autre.

Il est évident, d'ailleurs, que l'ordonnée de la courbe doit être exprimée par la fonction de x qui a pour coefficient différentiel X, fonction que nous représentons par $\int Xdx$. Mais si l'on s'en tenait à cette seule fonction en écrivant simplement $y = \int Xdx$, on choisirait entre les courbes dont il s'agit, puisqu'à une valeur déterminée de x correspondrait alors une valeur déterminée de y. Si l'on veut donc (comme il est nécessaire de le faire) conserver à l'intégrale une aussi grande généralité et un sens aussi étendu qu'à la différentielle proposée, on écrira

$$y = C + \int Xdx,$$

C désignant une quantité constante arbitraire. De cette manière l'expression de y peut représenter l'ordonnée de toutes les courbes en nombre infini dont la direction de

la tangente est déterminée dans un point quelconque par l'expression $\frac{dy}{dx}=X$ du coefficient différentiel du premier ordre.

257. Remarquons enfin que, pour faire cesser toute indétermination sur la courbe dont la fonction y doit représenter l'ordonnée, il suffirait de se donner un point quelconque par lequel cette courbe devrait passer. Il est facile de se rendre compte, en effet, que la connaissance d'un seul point d'une courbe, et de la direction de la tangente correspondante à une valeur quelconque de l'abscisse, suffit pour tracer cette courbe dans toute son étendue. Mais se donner un point d'une courbe, c'est-à-dire qu'à une certaine valeur x_0 de x correspond une certaine valeur de y_0 de y. Or, si l'on fait une telle supposition, la constante arbitraire C de l'équation

$$y=C+\int X dx$$

se trouvera déterminée; car soit P la fonction de x, dont la différentielle est Xdx, et désignons par P_0 la valeur que prend P quand $x=0$. On devra donc avoir

$$y_0=C+P_0,$$

équation qui détermine la valeur de C.

En général, la constante arbitraire est déterminée lorsque, en donnant la différentielle Xdx dont on demande l'intégrale y, on ajoute qu'à une certaine valeur donnée a de x doit répondre une valeur également donnée b pour y.

258. La nature de l'opération désignée par le nom d'intégration étant expliquée par ce qui précède, il

reste à indiquer les moyens que l'analyse fournit pour effectuer cette opération, c'est-à-dire pour trouver la fonction finie de la variable x qui, étant différentiée, donnera une différentielle quelconque proposée Xdx ; ou si l'on veut pour trouver la fonction primitive dont une fonction donnée X est la fonction dérivée ou le coefficient différentiel du premier ordre. Mais nous devons faire observer que, tandis que l'opération qui consiste à déduire d'une fonction donnée y sa différentielle dy s'effectue par un procédé régulier conduisant toujours au résultat demandé, l'opération inverse qui consiste à revenir de la différentielle à la fonction primitive, ne peut au contraire s'effectuer que dans des cas particuliers, et en quelque sorte par exception. En général, on n'est pas assuré de pouvoir assigner en termes finis la fonction primitive de x correspondante à une différentielle donnée Xdx ; en sorte que l'on est souvent obligé, comme on le verra par la suite, de suppléer par des procédés d'approximation au manque de l'expression finie de cette fonction primitive. Il importe, d'ailleurs, de connaître les principaux cas dans lesquels l'intégration peut être effectuée, et les méthodes dont cette opération exige l'usage.

259. Il est évident, en premier lieu, que l'on obtient immédiatement l'intégrale d'une différentielle proposée lorsque cette différentielle est reconnue pour appartenir aux fonctions simples dont il a été question ci-dessus dans les art. II et III. D'après cela, on voit sur-le-champ qu'en supposant

$dy = x^m dx$,	on aura	$y = C + \frac{x^{m+1}}{m+1}$
$\frac{dx}{x}$		$C + lx$
$e^x dx$		$C + e^x$
$a^x dx$		$C + \frac{a^x}{la}$
$\sin. x. dx$		$C - \cos. x$
$\cos. x. dx$		$C + \sin. x$
$\frac{dx}{\cos.^2 x}$		$C + \text{tang.}\, x$
$\frac{dx}{\sin.^2 x}$		$C - \cot. x$
$\frac{ax}{\sqrt{1-x^2}}$		$C + \text{arc.}\sin. x$
$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$		$C + \text{arc.}\cos. x$
$\frac{dx}{1+x^2}$		$C + \text{arc.tang.}\, x$
$-\frac{dx}{1+x^2}$		$C + \text{arc}\cot. x$.

(La formule $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ subsiste en général pour toutes les valeurs positives ou négatives, entières ou fractionnaires, et même irrationnelles, de l'exposant m. On peut distinguer les cas particuliers suivants :

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x},$$

qui se présentent fréquemment. Il faut toutefois excepter le seul cas où l'on aurait $m = -1$, et où la for-

mule générale donnerait $\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{0}$. Ne concluons pas, d'ailleurs, de ce résultat que l'analyse indique ici une valeur infinie pour l'intégrale de la fonction différentielle $\frac{dx}{x}$, ce qui serait absurde. Nous devons remarquer, en effet, que l'intégrale doit être complétée par une constante arbitraire. Or, comme rien n'empêche de supposer à cette constante une valeur infinie négative, il faut seulement conclure que l'expression générale $C+\frac{x^{m+1}}{m+1}$ donne un résultat indéterminé quand $m=-1$. En mettant cette expression sous la forme $\frac{x^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$, a désignant une constante (ce qui est permis), et la considérant comme une fonction de m qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque l'on attribue à m la valeur -1, on pourra en trouver la véritable valeur en appliquant les règles données dans les numéros 94 et suivants. Le rapport des coefficients différentiels des deux termes de la fraction pris relativement à m est $\frac{lx.x^{m+1}-la.a^{m+1}}{1}$, et donne en faisant $m=-1$, $lx-la$ pour l'expression de la fonction cherchée. On sait effectivement, par le calcul différentiel, que $d.\,lx=\frac{dx}{x}$, d'où résulte $\int\frac{dx}{x}=lx$, expression à laquelle on doit ajouter une constante arbitraire. La valeur -1 attribuée à l'exposant m entraînant un changement dans la nature de la fonction par laquelle l'intégrale est représentée,

fonction qui alors n'est plus comprise dans l'expression générale $C+\frac{x^{m+1}}{m+1}$, on est averti de cette circonstance par la valeur indéterminée que prend alors cette expression.)

260. A l'égard des fonctions différentielles plus composées, on ne parvient à les intégrer qu'en employant divers procédés dont l'objet est toujours ou de décomposer la fonction proposée en d'autres fonctions différentielles plus simples qui rentrent dans quelques-unes des précédentes ; ou d'en changer la forme par la substitution d'une autre variable à la variable x, afin de la faire rentrer également dans les différentielles dont les fonctions primitives sont immédiatement connues. Ou enfin de faire dépendre la recherche de l'intégrale demandée de la connaissance d'une autre intégrale qu'il est plus facile d'obtenir.

Tel est l'objet du procédé connu sous le nom d'intégration par parties, qui est un des plus généraux dont on fasse usage dans le calcul intégral. Remarquons que

$$d.uv=udv+vdu:$$

donc réciproquement

$$uv=\int udv+\int vdu;$$

d'où l'on tire

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Ainsi, ayant mis une différentielle quelconque proposée sous la forme udv, c'est-à dire sous la forme du produit d'une fonction finie u de la variable x, par la fonction différentielle dv de cette même variable (dont nous sup-

posons que l'on connaisse l'intégrale v), la recherche de l'intégrale $\int u dv$ est ramenée à connaître l'intégrale $\int v du$. Il est superflu d'ajouter que l'expression de l'intégrale demandée doit toujours être complétée par une constante arbitraire, que nous avons omis d'écrire dans l'équation précédente.

261. Pour faire concevoir par un exemple l'utilité du procédé de l'intégration par parties, soit la différentielle proposée $dy = x \cos. x dx$. Nous considérons les deux facteurs x et $\cos. x dx$, dont le dernier a pour intégrale $\sin. x$. Ainsi, conformément à la formule générale précédente, nous écrirons

$$\begin{aligned}\int x \cos. x dx &= x. \sin. x - \int \sin. x dx \\ &= x. \sin. x + \cos. x\end{aligned}$$

et en complétant l'intégrale par une constante arbitraire nous avons

$$y = C + x. \sin. x + \cos. x$$

expression dont l'exactitude peut être vérifiée par la différentiation. Ajoutons que le succès de l'opération dépend en général du choix des facteurs dans lesquels on décompose la différentielle proposée. Si dans la différentielle précédente $x \cos. x dx$ nous considérions les deux facteurs $\cos. x$ et $x dx$, dont le dernier a pour intégrale $\frac{x^2}{2}$, nous devrions écrire

$$\begin{aligned}\int \cos. x. x dx &= \frac{x^2 \cos. x}{2} - \int \frac{x^2}{2} (-\sin. x dx) \\ &= \frac{x^2 \cos. x}{2} + \int \frac{x^2 \sin. x dx}{2},\end{aligned}$$

en sorte que la recherche de l'intégrale demandée se trouverait dépendre de la recherche d'une autre intégrale plus compliquée. On doit toujours décomposer (s'il est possible) la différentielle proposée de manière que l'intégration d'un des facteurs et la différentiation de l'autre la ramène à une expression plus simple dont l'intégrale se présente immédiatement.

262. L'opération de l'intégration des fonctions différentielles peut d'ailleurs être facilitée par les remarques suivantes :

1° Lorsqu'une différentielle est affectée d'un facteur constant, ce facteur affecte également l'intégrale

$$dy = aXdx \qquad \text{donne} \qquad y = C + a\int Xdx.$$

2° Lorsque la fonction proposée présente la somme de plusieurs différentielles, l'intégrale demandée est également la somme des intégrales de ces différentielles considérées chacune à part

$$dy = Xdx + X_1dx - X_2dx$$

donne

$$y = C + \int Xdx + \int X_1dx - \int X_2dx.$$

3° Lorsqu'une différentielle est de la forme, ou peut être mise sous la forme

$$f(X).dX,$$

X désignant toujours une fonction quelconque de la variable x, on peut alors la traiter comme si X était une variable indépendante; en sorte que si $F(x)$ représente la fonction de x dont la différentielle est $f(x).dx$, c'est-à-dire si l'on a

$$F(x) = \int f(x).dx,$$

on a également

$$F(X)=\int f(X).dX.$$

Soit proposée, par exemple, la différentielle

$$dy=x^{m-1}.\sin.(a+bx^m)dx.$$

En multipliant et divisant par mb on peut écrire

$$dy=\frac{1}{mb}.\sin.(a+bx^m).mbx^{m-1}dx.$$

Or, $mbx^{m-1}\,dx$ est la différentielle de la fonction $a+bx^m$, qui se trouve sous le signe sinus. En posant donc $X=a+bx^m$, nous aurons

$$dy=\frac{1}{mb}\sin.X.\,dX;$$

dont l'intégrale est

$$y=C-\frac{1}{mb}\cos.X=C-\frac{1}{mb}\cos.(a+bx^m),$$

comme on le vérifiera en appliquant les règles de la différentiation.

XXIV. INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES ENTIÈRES ET FRACTIONNAIRES.

263. On entend par fonction rationnelle entière de la variable x toute fonction formée de termes où il n'entre que des puissances de cette variable dont l'exposant est un nombre entier. Telle est la fonction différentielle

$$dy=(a+bx^m+cx^n+dx^p+\text{etc.})\,dx,$$

dans laquelle $a, b, c, \ldots.$ sont des constantes quelconques

et $m, n, p, \ldots$ sont des nombres entiers positifs ou négatifs. Une telle fonction peut toujours être intégrée, et son intégrale est évidemment, d'après ce qu'on a vu dans l'article précédent,

$$y = C + ax + \frac{bx^{m+1}}{m+1} + \frac{cx^{n+1}}{n+1} + \frac{dx^{p+1}}{p+1} + \text{etc.},$$

C désignant la constante arbitraire. Il faut remarquer seulement que si l'exposant de x dans l'un des termes était -1, en sorte que ce terme fût $\frac{h}{x}dx$, son intégrale serait $h.lx$.

De plus, la différentielle précédente s'intégrerait encore de la même manière si les exposants $m, n, p \ldots$ avaient des valeurs quelconques non entières.

264. Si l'on donnait la fonction différentielle sous la forme

$$dy = (a + bx^m + cx^n + \text{etc.})^r dx,$$

r étant un nombre entier, on la ferait rentrer dans la précédente en développant par la multiplication la puissance indiquée.

Mais si l'on avait simplement

$$dy = (a+bx)^r dx,$$

qui peut s'écrire

$$dy = \frac{1}{b}(a+bx)^r bdx,$$

on remarquerait que bdx étant la différentielle de $a+bx$, la fonction proposée se trouve dans le cas dont il a été question dans le n° 262, en sorte que l'on a immédiatement en posant $a+bx = X$,

$$dy = \frac{1}{b} X^r dX,$$

d'où (quel que soit le nombre r, sauf le cas où il serait -1)

$$y=C+\frac{1}{b}\frac{X^{r+1}}{r+1}=C+\frac{(a+bx)^{r+1}}{b(r+1)}.$$

De même si l'on avait

$$dy=(a+bx^m)^r x^{m-1}dx,$$

on trouverait par une remarque semblable

$$y=C+\frac{(a+bx^m)^{r+1}}{bm(r+1)}.$$

265. Considérons maintenant les fonctions fractionnaires rationnelles dont la forme générale est

$$dy=\frac{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\dots\dots+f}{x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\dots\dots+t}dx,$$

$a, b, c, \dots . f$ et $p, q, \dots . t$ désignant des coefficients constants quelconques; m et n des nombres entiers. Nous remarquerons en premier lieu que si l'exposant m dans le numérateur surpassait l'exposant n dans le dénominateur, on pourrait, par la simple division algébrique, changer la fraction qui multiplie dx en une fonction entière à laquelle se trouverait ajoutée une nouvelle fraction dans laquelle le plus grand exposant de x dans le numérateur serait plus petit, d'une unité au moins, que le plus grand exposant dans le dénominateur. L'intégration de la fonction entière s'effectuerait d'après ce qui a été dit dans le n° 263. Ainsi, l'intégration de la différentielle proposée se ramène toujours au cas où l'exposant m est au plus égal à $n-1$.

Cela posé, soit en général

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

une fraction rationnelle, $F(x)$ désignant un polynome en x du degré n, de la forme $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots\ldots+t$; et $f(x)$ un autre polynome en x du degré $n-1$ au plus. Supposons qu'ayant écrit l'équation

$$F(x)=0,$$

cette équation ait été résolue par les méthodes connues, et qu'on en ait déterminé en nombres toutes les racines réelles et imaginaires. Désignons par a, a_1, a_2, etc. les racines réelles; par $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, $\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1}$, $\alpha_2\pm\beta_2\sqrt{-1}$, etc. les racines imaginaires; et par conséquent par $x-a$, $x-a_1$, $x-a_2$, etc., les facteurs simples correspondants à chaque racine réelle; et par $(x-\alpha)^2+\beta^2$, $(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2$, $(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2$, etc., les facteurs du second degré correspondants à chaque couple de racines imaginaires. Supposons en premier lieu qu'il n'y ait pas de racines égales entre elles. On sait par la théorie des équations que le polynome $F(x)$ est égal au produit des facteurs simples ou doubles correspondants aux racines de l'équation $F(x)=0$; et nous remarquons que l'on peut toujours poser

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\text{etc.},$$
$$+\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\frac{M_2x+N_2}{(x-\alpha_2)^2+\beta_2}+\text{etc.}.$$

A, A_1, A_2, etc.; M, M_1, M_2, etc; et N, N_1, N_2, etc., désignant des constantes; puisqu'en réduisant les fractions

du second membre au même dénominateur, le dénominateur commun sera $F(x)$, et le numérateur un polynome en x du degré $n-1$ que l'on rendra identique avec le polynome $f(x)$, en posant $n-1$ équations du premier degré, c'est-à-dire autant d'équations qu'il existe de constantes indéterminées. La fraction proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$ se trouvera décomposée de cette manière en fractions partielles de la forme $\frac{A}{x-a}$, ou $\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$. Quant à la détermination des constantes qui forment les numérateurs des fractions partielles, on pourra l'effectuer très-simplement de la manière suivante.

266. Proposons-nous de déterminer le numérateur A de la première fraction simple $\frac{A}{x-a}$, et posons pour abréger

$$F(x)=(x-a).\varphi(x)$$

en désignant par $\varphi(x)$ le produit de tous les facteurs du polynome $F(x)$ à l'exception de $x-a$. Nous pouvons écrire au lieu de l'équation précédente

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{\varpi(x)}{\varphi(x)},$$

$\varpi(x)$ désignant une fonction entière de x, et si nous multiplions les deux membres par $F(x)$, il viendra

$$f(x)=A\,\frac{F(x)}{x-x}+\frac{\varpi(x).F(x)}{\varphi(x)}.$$

Or, si l'on supposait $x=a$, la fraction multipliée par A deviendrait $\frac{0}{0}$, et donnerait pour sa véritable valeur, d'a-

près la règle des numéros 94 et suivants, $F'(a)$, tandis que le terme suivant se réduirait à zéro. Donc

$$f(a)=A.F'(a), \qquad \text{d'où} \qquad A=\frac{f(a)}{F'(a)},$$

en désignant par $F'(a)$ la valeur que prend le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction $F(x)$ lorsqu'on y suppose $x=a$. Il est visible que les numérateurs des fractions simples suivantes se détermineront de la même manière, et qu'on aura également

$$A_1=\frac{f(a_1)}{F'(a_1)}, \qquad A_2=\frac{f(a_2)}{F'(a_2)}, \quad \text{etc.}$$

Il n'est point à craindre d'ailleurs que les valeurs de $F'(a)$, $F'(a_1)$, $F'(a_2)$, etc., ne se réduisent à zéro : cela ne pourrait arriver qu'autant qu'il y aurait au moins deux racines égales à a, a_1, a_2, etc., ce qui est contre la supposition.

267. Les numérateurs des fractions simples correspondantes aux racines imaginaires peuvent être déterminées d'une manière semblable. Soit la fraction

$$\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+6^2}:$$

on peut la mettre sous la forme

$$\frac{P-Q\sqrt{-1}}{x-\alpha-6\sqrt{-1}}+\frac{P+Q\sqrt{-1}}{x-\alpha+6\sqrt{-1}}=\frac{2P(x-\alpha)+2Q6}{(x-\alpha)^2+6^2},$$

et l'on a $M=2P$, $N=-2P\alpha+2Q6$. En employant le même raisonnement qui vient d'être présenté, on conclura donc que les quantités P, Q doivent satisfaire à l'équation

$$P-Q\sqrt{-1}=\frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})},$$

qui se partage en deux équations distinctes lorsqu'on égale séparément les termes réels et ceux qui sont affectés du radical imaginaire $\sqrt{-1}$, et qui suffit par conséquent pour déterminer les deux quantités dont il s'agit. On aura de la même manière

$$P_1-Q_1\sqrt{-1}=\frac{f(\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1})}{F'(\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1})},\ P_2-Q_2\sqrt{-1}=\frac{f(\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1})}{F'(\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1})}, \text{etc.}$$

puis

$$M_1=2P_1,\ N_1=-2P_1\alpha_1+2Q_1\beta_1;\ M_2=2P_2,\ N_2=-2P_2\alpha_2+2Q_2\beta_2;$$

et ainsi de suite.

268. Si l'on suppose en second lieu que l'équation $F(x)=0$ posée dans le n° 265 a plusieurs racines égales à la racine réelle $x=a$, la décomposition de la fraction proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$ pourra s'opérer de la manière suivante. On écrira

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-2}}+\ldots\ldots+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\frac{\varpi(x)}{\varphi(x)}$$

en désignant par k le nombre des racines égales dont il s'agit, par A, A_1, A_2,....A_{k-1} des constantes indéterminées; par $\varphi(x)$ le produit de tous les facteurs du dénominateur $F(x)$, à l'exception du facteur $(x-a)^k$, en sorte que l'on a $(x-a)^k.\ \varphi(x)=F(x)$; enfin pour $\varpi(x)$ un polynome entier en x dont le degré est inférieur à la plus haute puissance de x contenue dans $\varphi(x)$. Il est visible qu'en réduisant toutes les fractions du second membre

au même dénominateur, qui sera F(x), on pourra rendre les deux membres identiques en disposant des constantes $A, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$. Pour déterminer les valeurs de ces constantes, nous remarquons qu'après la réduction au même dénominateur dont on vient de parler l'équation précédente devient simplement

$$f(x)=A.\varphi(x)+A_1(x-a).\varphi(x)+A_2(x-a)^2.\varphi(x)+\ldots\ldots$$
$$+A_{k-1}(x-a)^{k-1}.\varphi(x)+(x-a)^k.\varpi(x).$$

Or en la différentiant une, deux, trois fois, etc., puis faisant après les différentiations $x=a$, cette équation donnera les suivantes,

$$f\ (a)=A.\varphi\ (a)$$
$$f'\ (a)=A.\varphi'\ (a)+A_1.\ \varphi\ (a)+$$
$$f''\ (a)=A.\varphi''\ (a)+A_1.2\varphi'\ (a)+A_2.\ 2\varphi\ (a)$$
$$f'''(a)=A.\varphi'''(a)+A_1.3\varphi''(a)+A_2.\ 6\varphi'(a)+A_3.\ 6\varphi(a)$$
$$f^{\text{IV}}(a)=A.\varphi^{\text{IV}}(a)+A_1.4\varphi'''(a)+A_2.12\varphi''(a)+A_3.24\varphi'(a)+A_4.24\varphi(a)$$

etc.

au moyen desquelles les valeurs de $A, A_1, A_2, \ldots\ldots A_{k-1}$ pourront être calculées successivement. Ces valeurs dépendront, comme on le voit, des fonctions dérivées successives de la fonction $\varphi(x)$, qui est connue, puisqu'elle est le quotient de la division du dénominateur F(x) par $(x-a)^k$. Mais si l'on ne veut point calculer cette fonction, on remarquera qu'en prenant dans l'équation

$$F(x)=(x-a)^k.\varphi(x),$$

les coefficients différentiels ou fonctions dérivées des divers ordres de chaque membre on trouvera généralement pour l'expression de la fonction dérivée d'un ordre quelconque désigné par i,

$$
\begin{aligned}
x)= \quad & k(k-1)(k-2)\ldots(k-i+1)(x-a)^{k-i}\,.\varphi\,(x)\\
+ \quad & i.k(k-1)(k-2)\ldots(k-i+2)(x-a)^{k-i+1}.\varphi'\,(x)\\
+ \quad & \frac{i(i-1)}{2}.k(k-1)(k-2)\ldots(k-i+3)(x-a)^{k-i+2}.\varphi''\,(x)\\
+ \quad & \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3}.k(k-1)(k-2)\ldots(k-i+4)(x-a)^{k-i+3}.\varphi'''(x)\\
+ \quad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ \quad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ \quad & (x-a)^{k}\,.\varphi^{(i)}(x)
\end{aligned}
$$

d'où l'on voit facilement qu'en faisant $x=a$ dans les fonctions dérivées des ordres $k, k+1, k+2$, etc., il viendra

$$
\begin{aligned}
F^{(k)}\,(a) &= .k(k-1)(k-2)\ldots\ldots 2.1\varphi\,(a)\\
F^{(k+1)}(a) &= (k+1).k(k-1)(k-2)\ldots\ldots 2.1\varphi'\,(a)\\
F^{(k+2)}(a) &= \frac{(k+2)(k+1)}{2}.k(k-1)(k-2)\ldots\ldots 2.1\varphi''(a)\\
F^{(k+3)}(a) &= \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{2.3}.k(k-1)(k-2)\ldots\ldots 2.1\varphi'''(a)
\end{aligned}
$$

etc.

équations par lesquelles les quantités $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc., se trouvent déterminées au moyen des valeurs que prennent les fonctions dérivées des ordres $k, k+1, k+2$, etc., du dénominateur $F(x)$ lorsqu'on y fait $x=a$.

269. S'il existait dans l'équation $F(x)=0$ d'autres racines réelles égales entre elles, par exemple k racines égales à a_1, on concevrait de même que la présence du facteur $(x-a_1)^k$ dans le polynome $F(x)$ donnerait lieu dans la décomposition de la fraction proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$, à la présence des fractions simples.

$$\frac{A}{(x-a_1)^k}+\frac{A_1}{(x-a_1)^{k-1}}+\frac{A_2}{(x-a_1)^{k-2}}+\ldots\ldots+\frac{A_{k-1}}{x-a_1},$$

et l'on emploierait pour le calcul des constantes $A, A_1, A_2, \ldots A_{k-1}$ les formules données ci-dessus, dans lesquelles il faudrait regarder $\varphi(x)$ comme représentant le quotient de la division de $F(x)$ par le facteur $(x-a_1)^k$. Il en serait de même s'il se trouvait un plus grand nombre de racines multiples.

270. Ces procédés s'étendront d'ailleurs facilement au cas où il y aurait des racines imaginaires multiples dans l'équation $F(x)=0$. Si l'on représente en effet par $\left[(x-a)^2+6^2\right]^k$ l'un des facteurs du polynome $F(x)$ et si l'on veut déterminer les fractions simples auxquelles la présence de ce facteur doit donner lieu, on écrira

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+6^2]^k}+\frac{M_1x+N_1}{[(x-\alpha)^2+6^2]^{k-1}}+\frac{M_2x+N_2}{[(x-\alpha)^2+6^2]^{k-2}}+\ldots\ldots+\ldots$$

en désignant par $\varphi(x)$ le produit de tous les facteurs dont se compose le polynome $F(x)$, à l'exception du facteur $\left[(x-\alpha)^2+6^2\right]^k$. Lorsqu'on réduira le second membre au même donéminateur, cette équation deviendra

$$f(x)=(Mx+N).\varphi(x)+(M_1x+N_1)[(x-\alpha)^2+6^2].\varphi(x)+\ldots.+[(x-\alpha)^2+6^2]\ldots$$

Si l'on prend les différentielles successives, puis que l'on donne à x les valeurs $x=\alpha\mp6\sqrt{-1}$ qui réduisent à zéro le facteur $(x-\alpha)^2+6^2$, on obtiendra, en remarquant que chacune de ces équations se partage en deux lorsqu'on égale séparément les parties réelles et les parties imaginaires, le nombre d'équations nécessaires pour la détermination des constantes M et N, M_1 et N_1, M_2 et N_2, etc.

Il en serait de même si le dénominateur de la fraction proposée présentait d'autres racines imaginaires et multiples.

271. Revenons maintenant à l'intégration de la fonction différentielle

$$dy=\frac{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots\ldots.+f}{x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots\ldots.+t}dx$$

que nous nous sommes proposée n° 265. D'après ce qu'on a vu dans les numéros précédents, on peut toujours, par la décomposition de la fraction qui multiplie dx en fractions plus simples, faire dépendre cette intégration de celle des différentielles suivantes,

$$\frac{Adx}{x-a},\ \frac{Adx}{(x-a)^k},\ \frac{(Mx+N)dx}{(x-\alpha)^2+6^2},\ \frac{(Mx+N)dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^k}.$$

tout se réduit donc à intégrer ces dernières différentielles. Or, en se rappelant ce qui a été dit n° 259, on voit sur-le-champ, 1° que

$$dy=\frac{Adx}{x-a} \qquad \text{donne} \qquad y=C+A.l(x-a),$$

C représentant toujours la constante arbitraire introduite par l'intégration ;

2° Que

$$dy=\frac{Adx}{(x-a)^k} \qquad \text{donne} \qquad y=C-\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}.$$

272. 3° Que

$$dy=\frac{(Mx+N)dx}{(x-\alpha)^2+6^2}=\frac{M(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+6^2}+\frac{\frac{M\alpha+N}{6}\frac{dx}{6}}{\left(\frac{x-\alpha}{6}\right)^2+1}$$

donne

$$y = C + \frac{M}{2} . l[(x-\alpha)^2+6^2] + \frac{M\alpha+N}{6} . \text{arc. tang.} \frac{x-\alpha}{6}.$$

273. 4° Enfin, qu'à l'égard de la fonction différentielle

$$\frac{(Mx+N)dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^k} = \frac{M(x-\alpha)dx+(M\alpha+N)dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^k}$$

la première partie

$$\frac{M(x-\alpha)dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^k}$$

a visiblement pour intégrale

$$C - \frac{M}{2(k-1)[(x-\alpha)^2+6^2]^{k-1}};$$

et quant à la seconde partie

$$\frac{(M\alpha+N)dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^k} = \frac{\frac{M\alpha+N}{6^{2k-1}} \frac{dx}{6}}{\left[\left(\frac{x-\alpha}{6}\right)^2+1\right]^k}$$

qu'on peut en effectuer l'intégration comme il suit :

Posons $\frac{x-\alpha}{6}=t$, d'où $\frac{dx}{6}=dt$, cette dernière différentielle deviendra

$$\frac{M\alpha+N}{6^{2k-1}} . \frac{dt}{(t^2+1)^k};$$

en sorte qu'il s'agit d'intégrer la fonction différentielle

$$\frac{dt}{(t^2+1)^k}.$$

Or, cette fonction pouvant se mettre sous la forme suivante (en ajoutant et retranchant t^2dt au numérateur)

$$\frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}}-\frac{t^2dt}{(t^2+1)^k},$$

on a donc

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^k}=\int\frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^k}.$$

Mais en considérant dans l'intégrale $\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^k}$ les deux facteurs $\frac{t}{2}$ et $\frac{2tdt}{(t^2+1)^k}$, et appliquant le procédé de l'intégration par parties conformément à ce qu'on a vu dans le n° 260, il vient

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^k}=-\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{(k-1)(t^2+1)^{k-1}}+\int\frac{dt}{2}\,\frac{1}{(k-1)(t^2+1)^{k-1}};$$

et en substituant dans l'équation précédente,

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^k}=\frac{t}{2(k-1)(t^2+1)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}}.$$

Ainsi l'on fait dépendre l'intégrale cherchée d'une autre intégrale de même nature, dans laquelle l'exposant k du dénominateur est diminué d'une unité. En continuant de la même manière on trouve pour l'expression de l'intégrale dont il s'agit

$$\begin{aligned}\frac{dt}{(t^2+1)^k}=\frac{t}{2(t^2+1)^{k-1}}\Bigg[&\frac{1}{k-1}+\frac{k-\frac{3}{2}}{k-1}\cdot\frac{t^2+1}{k-2}+\frac{k-\frac{3}{2}}{k-1}\cdot\frac{k-\frac{5}{2}}{k-2}\cdot\frac{(t^2+1)^2}{k-3}+\ldots\ldots\\&\ldots\ldots+\frac{k-\frac{3}{2}}{k-1}\cdot\frac{k-\frac{5}{2}}{k-2}\cdot\frac{k-\frac{7}{2}}{k-3}\cdot\frac{(t^2+1)^3}{k-4}+\ldots\ldots\ldots\\&\ldots+\frac{k-\frac{3}{2}}{k-1}\cdot\frac{k-\frac{5}{2}}{k-2}\cdot\frac{k-\frac{7}{2}}{k-3}\ldots\ldots\frac{\frac{5}{2}}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{(t^2+1)^{k-2}}{1}\Bigg]\\&+\frac{k-\frac{3}{2}}{k-1}\cdot\frac{k-\frac{5}{2}}{k-2}\cdot\frac{k-\frac{7}{2}}{k-3}\ldots\ldots\ldots\frac{\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot\text{arc. tang. }t.\end{aligned}$$

Si l'on remplace dans cette expression t par sa valeur $\frac{x-\alpha}{\beta}$, et si l'on multiplie par $\frac{M\alpha+N}{\beta^{2k-1}}$, on aura donc (en ajoutant une constante arbitraire) l'expression de l'intégrale de la seconde partie $\frac{(M\alpha+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}$ de la différentielle proposée.

On pourra toujours, au moyen des notions qui viennent d'être présentées, effectuer l'intégration d'une fonction différentielle quelconque rationnelle.

XXV. INTÉGRATION DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES AFFECTÉES D'UN RADICAL DU SECOND DEGRÉ. DIFFÉRENTIELLES BINÔMES.

274. Lorsque les fonctions différentielles algébriques sont irrationnelles, on n'est point assuré en général d'en pouvoir effectuer l'intégration sous forme finie. Les procédés que l'on peut employer pour y parvenir consistent principalement à substituer à la variable x par rapport à laquelle la différentielle proposée est prise, une nouvelle variable t, en établissant, d'ailleurs, entre ces deux variables une relation telle, que l'irrationnalité de la fonction proposée disparaisse par la substitution de la valeur de dx en t et dt.

275. Le cas le plus étendu dans lequel le succès de ces procédés soit assuré est celui où l'irrationnalité de la fonction proposée tient seulement à la présence d'un radical du second degré, tel que $\sqrt{a+bx+cx^2}$, ou $\sqrt{a+bx-cx^2}$, a et b désignant des quantités con-

stantes quelconques, et c une quantité constante positive. On peut toujours alors rendre cette fonction rationnelle, et par conséquent en effectuer l'intégration au moyen des procédés qui ont été présentés dans l'article précédent.

En premier lieu, lorsque le signe du terme cx^2 est $+$, on posera, en désignant par t une nouvelle variable,

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=t-\sqrt{c}.x, \quad \text{ou} \quad a+bx=t^2-2\sqrt{c}.tx;$$

d'où

$$x=\frac{t^2-a}{2\sqrt{c}.t+b}, \quad \text{et} \quad dx=\frac{2(\sqrt{c}.t^2+bt+a\sqrt{c})dt}{(2\sqrt{c}.t+b)^2},$$

valeurs dont la substitution rendra évidemment la fonction proposée rationnelle.

276. En second lieu, lorsque le signe du terme cx^2 est $-$, la fonction proposée deviendra également rationnelle si l'on pose

$$\sqrt{a+bx-cx^2}=xt-\sqrt{a}, \quad \text{ou} \quad b-cx=xt^2-2\sqrt{a}.t;$$

d'où

$$x=\frac{b+2\sqrt{a}.t}{c+t^2}. \quad \text{et} \quad dx=\frac{2(c\sqrt{a}-bt-\sqrt{a}.t^2)dt}{(c+t^2)^2}.$$

Mais comme cette transformation, dans le cas où la quantité a serait négative, introduirait des termes imaginaires dans la différentielle proposée, on peut alors procéder de la manière suivante. Remarquons que l'on est ici censé opérer sur des quantités réelles, et par conséquent sur des valeurs de x telles que le radical $\sqrt{a+bx-cx^2}$

soit réel. Donc le trinôme $a+bx-cx^2$ a des valeurs positives ; d'où il suit que l'équation $x^2-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}=0$ a ses deux racines réelles. Représentons par ρ et ρ_1, ces racines. Nous poserons

$$\sqrt{a+bx-cx^2}=\sqrt{c(x-\rho)(\rho_1-x)}=\sqrt{c}(x-\rho)t, \quad \text{ou} \quad \rho_1-x=(x-\rho$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{\rho t^2+\rho_1}{t^2+1}, \quad \text{et} \quad dx=\frac{2(\rho-\rho_1)tdt}{(t^2+1)^2}.$$

Ces valeurs rendront rationnelle la différentielle proposée sans y introduire des quantités imaginaires.

277. L'irrationnalité d'une fonction différentielle peut également disparaître lorsqu'elle résulte de la présence de deux radicaux différents du premier degré, tels que $\sqrt{a+x}$, $\sqrt{b+x}$, en écrivant

$$\sqrt{b+x}=t, \quad \text{d'où} \quad x=t^2-b, \quad dx=2t.dt.$$

Cette transformation fait disparaître le second radical en donnant au premier la forme $\sqrt{a-b+t^2}$, ce qui ramène la fonction proposée au cas du n° 275.

278. Nous indiquerons les applications les plus simples des procédés qui viennent d'être exposés.

Soit

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}:$$

la transformation du n° 275 changera cette différentielle en

$$dy=\frac{2dt}{2\sqrt{c}.t+b}.$$

Donc

$$y=C+\frac{1}{\sqrt{c}}.\,l(2\sqrt{c}.t+b);$$

ou en remplaçant t par sa valeur en x,

$$y=C+\frac{1}{\sqrt{c}}.\,l(b+2cx+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2});$$

ou, ce qui revient au même,

$$y=C+\frac{1}{\sqrt{c}}.\,l\left(\frac{b}{2\sqrt{c}}+\sqrt{c}.x+\sqrt{a+bx+cx^2}\right).$$

C désigne toujours la constante arbitraire introduite par l'intégration

279. Soit

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}.$$

Si l'on emploie la première transformation du n° 276, cette différentielle se changera en

$$dy=-\frac{2dt}{c+t^2}, \quad \text{ou} \quad dy=-\frac{2}{\sqrt{c}}.\frac{\frac{dt}{\sqrt{c}}}{1+\frac{t^2}{c}},$$

dont l'intégrale est

$$y=C-\frac{2}{\sqrt{c}}.\ \text{arc tang.}\ \frac{t}{\sqrt{c}},$$

et en mettant pour t sa valeur en x

$$y=C-\frac{2}{\sqrt{c}}.\ \text{arc tang.}\ \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+bx-cx^2}}{\sqrt{c}.x}$$

Si maintenant l'on emploie la seconde transformation du même numéro, la différentielle proposée se changera en

$$dy = -\frac{2}{\sqrt{c}}\frac{dt}{1+t^2},$$

dont l'intégrale est

$$y = C - \frac{2}{\sqrt{c}}.\ \text{arc tang.}\, t;$$

et en remplaçant t par sa valeur

$$y = C - \frac{2}{\sqrt{c}}.\ \text{arc tang.}\sqrt{\frac{\rho_1 - x}{x - \rho}},$$

ou (puisque ρ et ρ_1 sont respectivement les racines de l'équation $x^2 - \frac{b}{c}x - \frac{a}{c} = 0$)

$$y = C - \frac{2}{\sqrt{c}}.\ \text{arc tang.}\sqrt{\frac{-2cx + b + \sqrt{4ac+b^2}}{2cx - b + \sqrt{4ac+b^2}}}.$$

Ces deux expressions de l'intégrale demandée y, peuvent être employées et ne diffèrent l'une de l'autre que par la valeur de la constante arbitraire.

280. Dans le cas particulier où la différentielle proposée serait

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

on aurait $a=1$, $b=0$, $c=1$. La formule du n° 278 donnerait

$$y = C + l(x + \sqrt{1+x^2}).$$

281. Dans le cas où cette différentielle serait

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

on sait que l'on aurait $y = C + \text{arc sin.}\, x$. En effet, la première formule du n° 279 donne

$$y = C - 2\,\text{arc tang.}\, \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Soit arc sin. $x = \varphi$: cette expression deviendra

$$y = C - 2\,\text{arc tang.}\, \frac{1+\cos.\varphi}{\sin.\varphi} = C - 2\,\text{arc tang.}\, \frac{\cos.\frac{1}{2}\varphi}{\sin.\frac{1}{2}\varphi} = C + \varphi.$$

De même, la seconde formule du n° 279 donne

$$y = C - 2\,\text{arc tang.}\, \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

c'est-à-dire

$$y = C - \text{arc tang.}\, \frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\frac{1-x}{1+x}},$$

ou

$$y = C - \text{arc tang.}\, \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = C - \text{arc tang.}\, \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi} = C - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = C + \varphi.$$

282. Remarquons, d'ailleurs, que l'on pourrait déduire l'intégrale de la fonction différentielle

$$dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

de la formule du n° 278 en y faisant $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$. On trouverait ainsi l'expression imaginaire

$$y = C + \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot l\left(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}\right).$$

Pour que cette expression s'accorde avec l'expression réelle $y = C + \text{arc sin.}\, x$, il est visible que l'on doit attri-

buer dans l'une et l'autre la même valeur à la constante arbitraire, puisqu'elles donnent également $y = C$ quand on y fait $x=0$. Donc

$$\text{arc.}\sin.x = \frac{1}{\sqrt{-1}}.\,l(x\sqrt{-1}+x\sqrt{1-x^2}),$$

ou

$$\varphi\sqrt{-1} = l(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi),$$

équation qui s'accorde avec ce qu'on a vu dans l'article XII.

283. Nous remarquerons encore que pour effectuer l'intégration de la différentielle

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}},$$

il peut paraître plus simple de ne pas employer *l'une ou* l'autre des transformations dont on a fait usage n° 279, et de ramener immédiatement cette différentielle à la forme $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. On aura de cette manière

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x-x^2}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}-\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\,\frac{\dfrac{dx}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x-\frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}\right)^2}};$$

dont l'intégrale est

$$y = C + \frac{1}{\sqrt{c}} \text{ arc sin. } \frac{x - \frac{b^2}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4c^2}}}$$

ou

$$y = C + \frac{1}{\sqrt{c}} \text{ arc sin. } \frac{2cx - b}{\sqrt{4ac + b^2}}.$$

Cette nouvelle expression ne diffère encore de celles qui ont été données n° 279 que par la valeur de la constante arbitraire.

On pourrait ramener de la même manière la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

à la suivante $\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$, dont l'intégrale a été donnée n° 280; mais on n'obtiendrait pas ainsi une expression plus simple que la formule du n° 278.

Différentielles binômes.

284. Cette expression désigne les différentielles de la forme

$$dy = dx \,.\, x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

a et b désignant des constantes, m et n des nombres quelconques, p et q des nombres entiers. Nous remarquerons en premier lieu que la généralité de cette fonction n'est pas diminuée lorsque m et n sont supposés entiers, et même lorsque n est supposé positif. En effet, on passera du cas général à celui-ci par des transformations

très-faciles. Cela posé, nous devons chercher en premier lieu les cas où la différentielle précédente peut être rendue rationnelle.

1° Si l'on pose

$$a+bx^n=t^q,$$

d'où

$$x=\left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad dx=dt.\frac{qt^{q-1}}{nb}\left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

la différentielle proposée se changera en

$$dy=dt.\frac{qt^{p+q-1}}{nb}\left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}.$$

Elle deviendra donc rationnelle si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier.

2° Si l'on pose

$$a+bx^n=x^nt^q,$$

d'où

$$x=\left(\frac{a}{t^q-b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad dx=\frac{1}{n}\left(\frac{a}{t^q-b}\right)^{\frac{1}{n}-1}.d\frac{a}{t^q-b},$$

la différentielle proposée se changera en

$$dy=\frac{t^p}{n}\left(\frac{a}{t^q-b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1}.d\frac{a}{t^q-b}.$$

Elle deviendra donc rationnelle si $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ est un nombre entier.

Ces deux cas sont les seuls pour lesquels on soit assuré de rendre la différentielle binome rationnelle.

285. Nous pourrons, d'après ce qui précède, intégrer toute différentielle de la forme

$$dy=F\left[x^{mn},(a+bx^n)^{\frac{p}{q}},\ (a+bx^n)^{\frac{r}{s}},\ (a+bx^n)^{\frac{t}{u}},\ \text{etc.}\right]x^{n-1}.dx,$$

m, n, p, q, r, s, t, u, etc., désignant des nombres entiers, et F une fonction rationnelle des quantités contenues dans la parenthèse. En effet, la fonction proposée deviendra rationnelle si l'on pose

$$a+bx^n=t^{qsu\ldots}.$$

On intégrera également toute différentielle de la forme

$$F\left[x^{mn},\left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}},\left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{r}{s}},\ \left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{t}{u}},\ \text{etc.}\right]x^{n-1}.dx;$$

cette différentielle devenant rationnelle lorsqu'on pose

$$\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}=t^{qsu\ldots}.$$

286. Lorsque la différentielle binome

$$dy=dx.x^{m-1}(a+bx^n)^p$$

(p désignant un nombre fractionnaire) ne peut pas être rendue rationnelle, on cherche à la réduire à une forme plus simple en dominant les exposants m ou p. Ces réductions s'opèrent au moyen de *l'intégration par parties*, dont le principe a été indiqué n° 260.

1° m étant supposé positif, on diminuera cet exposant comme il suit. On a

$$y=\int x^{m-n}(a+bx^n)^p.x^{n-1}dx$$

ou

$$y=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b}-\frac{m-n}{n(p+1)b}\int dx.x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}.$$

Mais

$$\int dx.x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}=\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p(a+bx^n)dx$$
$$=a\int dx.x^{m-n-1}(a+bx^n)^p+by:$$

donc

$$y=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b}-\frac{m-n}{n(p+1)}y-\frac{(m-n)a}{n(p+1)b}\int dx.x^{m-n-1}(a+bx^n)^p$$

ou enfin

$$y=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}-(m-n)a\int dx.x^{m-n-1}(a+bx^n)^p}{(m+np)b}.$$

On a fait dépendre l'intégrale demandée d'une *autre* intégrale de même forme, dans laquelle l'exposant $m-1$ est diminué du nombre n. En continuant à appliquer la même formule on diminuera cet exposant du plus grand multiple de n qui y soit contenu.

2° p étant supposé positif, on diminuera également cet exposant de la manière suivante :

$$y=\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}(a+bx^n)$$
$$=a\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}+b\int dx.x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}.$$

Mais la formule du numéro précédent donnera, en changeant m en $m+n$, et p en $p-1$,

$$\int dx.x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}=\frac{x^m(a+bx^n)^p-ma\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+np)b};$$

et en substituant cette valeur dans l'équation précédente il viendra

$$y=\frac{x^m(a+bx^n)^p+npa\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}}{m+np}.$$

Au moyen de cette formule, l'exposant p peut dans la différentielle proposée être diminué du plus grand nombre entier qui y soit contenu.

3° Si l'exposant m était négatif on emploierait la formule suivante. On a d'après ce qui précède

$$\ldots{}^{m-n-1}(a+bx^n)^p=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}-(m+np)b\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^p}{(m-n)a};$$

puis en mettant $-m+n$ au lieu de m, on a

$$\ldots{}^{-m-1}(a+bx^n)^p=-\frac{x^{-m}(a+bx^n)^{p+1}+(m-n-np)b\int dx.x^{-m+n-1}(a+bx^n)^p}{ma}.$$

4° Si l'exposant p était négatif, on remarquerait que, d'après ce qui précède,

$$\ldots dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}=-\frac{x^m(a+bx^n)^p-(m+np)\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^p}{npa};$$

puis en mettant $-p+1$ au lieu de p, il vient

$$\ldots{}^{-1}(a+bx^n)^{-p}=\frac{x^m(a+bx^n)^{-p+1}-(m+n-np)\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{-p+1}}{n(p-1)a}.$$

Les formules précédentes ne pourraient pas être employées si l'on avait $m+np=0$ ou $m-n=0$. Mais dans ces deux cas la différentielle binome peut être rendue rationnelle, conformément à ce qu'on a vu dans le n° 284. Remarquons, d'ailleurs, que dans les cas mêmes où cette différentielle est rationnelle, ou peut être rendue rationnelle, l'usage des formules de réduction dont il s'agit est généralement le moyen le plus simple d'obtenir l'intégrale demandée. On a vu un exemple de cette manière dans le n° 273.

287. Prenons encore pour exemple la différentielle

$$dy=\frac{x^r dx}{\sqrt{ax-x^2}}=dx.x^{r-\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous emploierons la première formule du numéro précédent dans laquelle on fera $m=r+\frac{1}{2}$, $n=1$, $p=-\frac{1}{2}$, $b=-1$, et l'on trouvera ainsi

$$y=-\frac{x^{r-1}\sqrt{ax-x^2}}{r}+\frac{(2r-1)a}{2r}\int\frac{x^{r-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

En continuant à appliquer la même formule, on parviendra évidemment à la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

qui rentre dans les cas traités dans les numéros 279 et suivants, et dont l'intégrale qui s'obtient immédiatement d'après ce qu'on a vu nº 283, est

$$C+\text{arc sin.}\frac{2x-a}{a}.$$

XXVI. INTÉGRATION DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES LOGARITHMIQUES, EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES.

288. Les intégrales des fonctions différentielles de cette nature ne s'obtiennent sous forme finie que dans quelques cas particuliers.

On voit en premier lieu, conformément à l'une des remarques qui ont été faites dans le nº 262, que si l'intégrale de la fonction différentielle $dx\,f(x)$ est connue, on connaîtra également les intégrales des fonctions différentielles

$\frac{dx}{x}.f(lx), dx.e^x.f(e^x), dx.\cos.x.f(\sin.x), dx.\sin.x.f(\cos.x),$

$\frac{dx}{1+x^2}.f(\text{arc tang}.x), \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.f(\text{arc sin}.x), \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.f(\text{arc cos}.x).$

On reconnaît également que le signe f désignant une fonction algébrique des quantités affectées par ce signe, on pourra rendre algébriques les fonctions différentielles

$$dx.f(e^x),\ dx.f(\sin.x, \cos.x),$$

en posant $e^x = t$ pour la première, et sin. $x = t$ ou cos. $x = t$ pour la seconde. Par conséquent, ces fonctions pourront être intégrées lorsque la fonction f sera rationnelle, ou pourra être rendue rationnelle.

Il en sera de même si l'on a sous le signe de fonction f les quantités sin. $2x$, sin. $3x$, sin. $4x$, etc., ou cos. $2x$, cos. $3x$, cos. $4x$, etc., parce que les sinus ou cosinus des arcs multiples peuvent être exprimés rationnellement au moyen des puissances du sinus ou du cosinus de l'arc simple par des formules qui se déduisent immédiatement du théorème de Moivre. (Voyez numéros 117 et suivants.)

289. On voit aussi que les fonctions différentielles transcendantes peuvent quelquefois être intégrées lorsqu'elles sont de la forme

$$dx.Pz^n,$$

P désignant une fonction algébrique, z une fonction transcendante dont le coefficient différentiel du premier ordre est algébrique, et n un nombre entier positif. Tel serait le cas où l'on aurait $z = l.f(x)$, $z =$ arc

tang. $f(x)$, en désignant par $f(x)$ une fonction algébrique de z.

En effet, en intégrant par parties la différentielle proposée, il viendra, en posant $Q = \int dx.P$,

$$\int dx.Pz^n = Qz^n - n\int dx Q.z^{n-1}\frac{dz}{dx};$$

puis en posant $R = \int dx.\, Q\frac{dz}{dx}$, on aura également

$$\int dx.Qz^{n-1}\frac{dz}{dx} = Rz^{n-1} - (n-1)\int dx.Rz^{n-2}\frac{dz}{dx};$$

puis en posant $S = \int dx.\, R\frac{dz}{dx}$,

$$\int dx.Rz^{n-2}\frac{dz}{dx} = Sz^{n-2} - (n-2)\int dx.Sz^{n-3}\frac{dz}{dx};$$

et ainsi de suite. Une opération analogue donnerait encore le moyen d'intégrer la fonction proposée si l'exposant n était négatif. Cette opération donnera l'intégrale demandée si l'on peut trouver l'expression finie des quantités désignées par Q, R, S, etc.

290. Un exemple simple de l'opération dont il s'agit, est l'intégration de la différentielle

$$dy = dx(lx)^n,$$

qui donne, n étant un nombre entier positif,

$$y = C + x(lx)^n\left[1 - \frac{n}{lx} + \frac{n(n-1)}{(lx)^2} - \ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots.3.2.1}{(lx)^n}\right].$$

Soit encore

$$dy = dx.x^{a-1}(lx)^n,$$

il viendra

$$y = C + \frac{x^a}{a}(lx)^n\left[1 - \frac{n}{alx} + \frac{n(n-1)}{a^2(lx)^2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{a^n(lx)^n}\right].$$

291. L'intégration par parties donne de la même manière l'intégrale de la différentielle

$$dy = dx.x^n e^{ax}.$$

On a en effet

$$\int dx.x^n e^{ax} = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int dx.x^{n-1}e^{ax};$$

et en appliquant la même transformation à l'intégrale du second membre, il viendra

$$\int dx.x^n e^{ax} = C + \frac{x^n e^{ax}}{a}\left[1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2x^2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{a^n x^n}\right].$$

On trouvera par le même procédé

$$\int dx.x^n \cos.ax = C + \frac{x^n}{a}\left\{\sin.ax\left[1 - \frac{n(n-1)}{a^2x^2} + \text{etc.}\right] + \cos.ax\left[\frac{n}{ax} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} + \text{etc.}\right]\right\}$$

$$\int dx.x^n \sin.ax = C - \frac{x^n}{a}\left\{\cos.ax\left[1 - \frac{n(n-1)}{a^2x^2} + \text{etc.}\right] - \sin.ax\left[\frac{n}{ax} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} + \text{etc.}\right]\right\}.$$

292. L'intégration par parties donnant

$$\int dx.e^{ax}\cos.bx = \frac{e^{ax}\cos.bx}{a} + \frac{b}{a}\int dx.e^{ax}\sin.bx$$

$$\int dx.e^{ax}\sin.bx = \frac{e^{ax}\sin.bx}{a} - \frac{b}{a}\int dx.e^{ax}\cos.bx,$$

on tire de ces deux équations

$$\int dx.e^{ax}\cos.bx = C + \frac{a\cos.bx + b\sin.bx}{a^2+b^2}\, e^{ax}$$

$$\int dx.e^{ax}\sin.bx = C + \frac{a\sin.bx - b\cos.bx}{a^2+b^2}\, e^{ax}.$$

La connaissance de ces deux intégrales mettrait à même d'intégrer les différentielles $dx.x^n\, e^{ax}\cos.\ bx$ et $dx.x^n e^{ax}\sin.bx$, par le procédé dont on a fait usage dans le numéro précédent.

293. Lorsque les différentielles contenant des fonctions transcendantes ne peuvent être intégrées sous forme finie, on cherche au moins à les faire dépendre de fonctions plus simples. Parmi les formules de réduction employées à cet effet nous distinguerons celles qui conviennent à la différentielle

$$dy = dx.\sin.^m x.\cos.^n x,$$

m et n représentant des nombres quelconques positifs ou négatifs.

On peut remarquer d'abord que cette différentielle se ramène facilement aux différentielles binomes, dont on s'est occupé dans les numéros 284 et suivants. En effet on a

$$dy = dx.\sin.^m x(1-\sin.^2 x)^{\frac{n}{2}};$$

puis en posant $\sin.x = t$, d'où $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$,

$$dy = dt.t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}:$$

fonction qui deviendrait rationnelle si n était impair. On pourrait donc employer les formules de réduction du

n° 286. Mais il convient mieux d'opérer directement sur la différentielle proposée.

1° Si l'exposant m est positif, on diminuera cet exposant sans augmenter n, en observant que

$$y=\int \sin.^{m-1}x.\cos.^{n}x.\sin.x dx.$$

Donc

$$y=-\frac{\sin.^{m-1}x.\cos.^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int dx.\sin.^{m-2}x.\cos.^{n+2}x,$$

ou

$$y=-\frac{\sin.^{m-1}x.\cos.^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}[\int dx.\sin.^{m-2}x.\cos.^{n}x-y],$$

équation d'où l'on tire

$$x.\sin.^{m}x.\cos.^{n}x=-\frac{\sin.^{m-1}x.\cos.^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}\int dx.\sin.^{m-2}x.\cos.^{n}x.$$

2° Si l'exposant n est positif, on diminuera cet exposant sans augmenter m, en employant la formule suivante, que l'on obtient d'une manière semblable,

$$x.\sin.^{m}x.\cos.^{n}x=\frac{\sin.^{m+1}x.\cos.^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int dx.\sin.^{m}x.\cos.^{n-2}x.$$

3° Si l'exposant m est négatif, on remarquerait que l'on tire de la première équation qui vient d'être obtenue

$$x.\sin.^{m-2}x.\cos.^{n}x=\frac{\sin.^{m-1}x.\cos.^{n+1}x}{m-1}+\frac{m+n}{m-1}\int dx.\sin.^{m}x.\cos.^{n}x;$$

et en changeant m en $-m+2$,

$$\int dx\frac{\cos.^{n}x}{\sin.^{m}x}=-\frac{\cos.^{n+1}x}{(m-1)\sin.^{m-1}x}+\frac{m-n-2}{m-1}\int\frac{\cos.^{n}x}{\sin.^{m-2}x}.$$

4° Enfin, si l'exposant n était négatif, on remarquerait également que la seconde des équations qui viennent d'être obtenues donne

$$\int dx.\sin.^m x.\cos.^{n-2}x = -\frac{\sin.^{m+1}x.\cos.^{n-1}x}{n-1} + \frac{m+n}{n-1}\int dx.\sin.^m x.\cos$$

et en changeant n en $-n+2$,

$$\int dx\frac{\sin.^m x}{\cos.^n x} = \frac{\sin.^{m+1}x}{(n-1)\cos.^{n-1}x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int dx\frac{\sin.^m x}{\cos.^{n-2}x}.$$

294. Parmi les cas particuliers compris dans les formules précédentes on peut distinguer les suivants ;

$$\int dx.\sin.^m x = -\frac{\sin.^{m-1}x.\cos.x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx.\sin.^{m-2}x$$

$$\int dx.\cos.^n x = \frac{\sin.x.\cos.^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}\int dx.\cos.^{n-2}x$$

$$\int\frac{dx}{\sin.^m x} = -\frac{\cos.x}{(m-1)\sin.^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{\sin.^{m-2}x}$$

$$\int\frac{dx}{\cos.^n x} = \frac{\sin.x}{(n-1)\cos.^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos.^{n-2}x}$$

$$\int dx\frac{\sin.^n x}{\cos.^n x} = \int dx.\mathrm{tang}.^n x = \frac{\mathrm{tang}.^{n-1}x}{n-1} - \int dx.\mathrm{tang}.^{n-2}x$$

$$\int dx\frac{\cos.^n x}{\sin.^n x} = \int dx.\cot.^n x = -\frac{\cot.^{n-1}x}{n-1} - \int dx.\cot.^{n-2}x.$$

295. D'après les réductions indiquées dans le n° 293, on fera toujours dépendre l'intégration des différentielles de la forme $dx.\sin.^m x.\cos.^n x$ de l'intégration d'autres différentielles de la même forme, mais dans lesquelles les exposants m et n ne dépasseront pas 1 et -1. Et lorsque les exposants m et n seront des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs, l'intégration de la

différentielle proposée se trouvera dépendre définitivement de l'intégration de l'une des neuf différentielles dont nous donnons ci-dessous les intégrales, savoir :

$$\int dx = C + x, \qquad \int dx.\sin.x.\cos.x = C + \frac{1}{2}.\sin.^2 x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin.x.\cos.x} = C + l.\mathrm{tang}.x, \quad \int dx.\sin.x = C - \cos.x,$$

$$\int dx\frac{\sin.x}{\cos.x} = C - l.\cos.x, \qquad \int \frac{dx}{\sin.x} = C + l.\mathrm{tang}.\frac{x}{2},$$

$$\int dx.\cos.x = C + \sin.x, \qquad \int dx\frac{\cos.x}{\sin.x} = C + l.\sin.x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = C + l.\mathrm{tang}.\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Ainsi, dans le cas où m et n sont des nombres entiers, on obtiendra toujours sous forme finie l'intégrale de la différentielle dont il s'agit.

Nous remarquerons enfin que l'on pourrait également intégrer les fonctions différentielles de cette espèce en remplaçant $\sin.^m x$ et $\cos.^n x$ par leurs expressions en fonctions linéaires des sinus, et cosinus de l'arc x et de ses multiples qui ont été données dans les numéros 136 et suivants, expressions composées d'un nombre déterminé de termes lorsque m et n sont des nombres entiers positifs.

296. La différentielle

$$dx.\sin.^m x.\cos.^n x$$

pouvant être intégrée sous forme finie lorsque m et n sont entiers, il est évident qu'en opérant comme on l'a fait dans les numéros 291 et suivants on intégrera dans le même cas la différentielle

$$dx.x^l.\sin.^m x.\cos.^n x,$$

l étant aussi un nombre entier, ou plus généralement la différentielle

$$dx.\mathrm{P}\sin.^m x.\cos.^n x,$$

P désignant une fonction rationnelle et entière de x.

Les différentielles de la forme

$$dx.\mathrm{P}(\mathrm{arc}\sin.x)^n \quad \text{ou} \quad dx.\mathrm{P}(\mathrm{arc}\cos.x)^n$$

se ramènent aux précédentes en posant

$$x = \sin.t \quad \text{ou} \quad x = \cos.t.$$

XXVII. INTÉGRATION PAR SÉRIES.

297. Une fonction quelconque pouvant en général être développée en une série ordonnée suivant les puissances entières de la variable, on peut obtenir sous la même forme l'expression de l'intégrale d'une différentielle quelconque. Ainsi, comme l'on a en général d'après le n° 81

$$fx = f0 + f'0.x + \frac{f''0}{2}x^2 + \frac{f'''0}{2.3}x^3 + \frac{f^{\mathrm{iv}}0}{2.3.4}x^4 + \text{etc.},$$

on aura également

$$\int dx.fx = \mathrm{C} + f0.x + f'0\frac{x^2}{2} + \frac{f''0}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{f'''0}{2.3}\frac{x^4}{4} + \frac{f^{\mathrm{iv}}0}{2.3.4}\frac{x^5}{5} + \text{etc.},$$

C désignant la constante arbitraire qui doit être ajoutée pour donner à l'intégrale la généralité nécessaire. Cette expression en série de l'intégrale $\int dx.fx$ peut être employée toutes les fois que la série est convergente.

Nous remarquerons de plus que si la série qui donne le développement de fx est convergente, la série qui

donne le développement de $\int dx.fx$ le sera à plus forte raison. En effet, le développement de fx ne peut être convergent qu'autant que le terme complémentaire

$$\frac{f^{\mu}(\theta x)}{2.3.4\ldots\ldots\mu}x^{\mu} \qquad (\textit{Voyez n° 86})$$

devient plus petit que toute grandeur donnée, pour les valeurs de x comprises entre 0 et x, lorsqu'on augmente indéfiniment le nombre μ. Soit Q la plus grande valeur du facteur $\frac{f^{\mu}(\theta x)}{2.3.4\ldots\mu}$. Si la condition énoncée subsiste, il est visible qu'elle subsistera pour la quantité

$$Q\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1},$$

et à plus forte raison pour le terme complémentaire de la série qui représente l'intégrale

298. Lorsque la fonction fx se trouve dans les cas d'exception qui ont été remarqués numéros 88 et suivants, c'est-à-dire lorsque le développement de cette fonction contient des puissances fractionnaires ou négatives de x, on peut également employer ce développement pour obtenir l'expression de l'intégrale $\int dx.fx$ en série, expression qui pourra servir au calcul numérique de cette intégrale si la série est convergente.

299. L'intégration par série est quelquefois le procédé le plus simple que l'on puisse employer pour obtenir le développement d'une fonction suivant les puissances entières ascendantes ou descendantes de la variable.

On a, par exemple,

$$d.l(1+x)=\frac{dx}{1+x}=dx(1-x+x^2-x^3+x^4-\text{etc.}):$$

donc

$$l(1+x)=\int\frac{dx}{1+x}=C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{etc.}$$

La constante arbitraire C doit être déterminée de manière que l'égalité des deux membres subsiste pour une valeur quelconque de x. Or, on faisant $x=0$ le premier membre se réduit à zéro, et la série du second membre disparaît. Donc $C=0$; d'où l'on conclut

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{etc.},$$

comme on l'a vu n° 102.

300. On a de la même manière

$$d.\,\text{arc tang.}\,x=\frac{dx}{1+x^2}=dx\,(1-x^2+x^4-x^6+x^8-\text{etc.}),$$

par conséquent

$$\text{arc tang.}\,x=\int\frac{dx}{1+x^2}=C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\text{etc.},$$

et comme la constante est nulle, il vient

$$\text{arc tang.}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\text{etc.},$$

comme on l'a vu dans le n° 115. Remarquons, d'ailleurs, que cette série n'est convergente qu'autant que x ne surpasse pas l'unité. On peut en obtenir une autre qui soit au contraire convergente lorsque x surpasse l'unité en écrivant

$$d.\,\text{arc tang.}\,x=\frac{dx}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{dx}{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}-\text{etc.}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\text{arc tang.}\,x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^6} - \frac{1}{9x^8} + \text{etc.}$$

et comme $x = \frac{1}{0}$ réduit cette équation à $\frac{\pi}{2} = C$, on trouve définitivement

$$\text{arc tang.}\,x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \frac{1}{9x^9} + \text{etc.}$$

Cette série ne convient qu'autant que n est comprise entre 1 et $\frac{1}{0}$.

301. L'équation

$$\text{c sin.}\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dx\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \text{etc.}\right)$$

donne de la même manière, en observant que la valeur de la constante est zéro

$$\text{arc sin.}\,x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{x^9}{9} + \text{etc.};$$

et en faisant $x = 1$ on trouve cette expression du nombre π,

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{1}{9} + \text{etc.}$$

302. On peut d'ailleurs obtenir le développement en série d'une intégrale demandée $\int dx.fx$, non-seulement en développant la fonction fx suivant les puissances de x, ce qui ne donne à intégrer que des termes de la forme $ax^m dx$, mais en décomposant la fonction fx en deux facteurs, ou la mettant sous la forme $\varphi x.\psi x$, puis développant un seul de ces facteurs, par exemple ψx. Les

termes du développement qui doivent être intégrés sont alors de la forme $ax^m.\varphi x.dx$, et il est nécessaire que l'intégration puisse en être effectuée par les méthodes connues.

Soit par exemple la différentielle

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)(1-bx)}}.$$

En développant le facteur $(1-bx)^{-\frac{1}{2}}$ il viendra

$$y=\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}\left(1+\frac{1}{2}bx+\frac{1.3}{2.4}b^2x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}b^3x^3+\text{etc.}\right).$$

Chaque terme de la série donne à intégrer une différentielle de la forme $\frac{x^r dx}{\sqrt{ax-x^2}}$, ce qu'on peut faire d'après ce qui a été dit dans le n° 287.

XXVIII. INTÉGRALES DÉFINIES.

303. Revenons aux notions présentées dans les numéros 255 et suivants. Soit en général

$$f(x).dx$$

une fonction différentielle quelconque de la variable x, et désignons par

$$\mathrm{F}(x)$$

l'intégrale de cette fonction différentielle, ou la fonction qui étant différentiée, aura $f(x).dx$ pour différentielle. Cela revient à poser

$$d.\mathrm{F}(x)=f(x).dx,$$

ou plus généralement

$$d[C+F(x)]=f(x).dx,$$

C désignant une quantité constante entièrement arbitraire. Et la fonction $F(x)$ pourra être déduite de la fonction différentielle $f(x).dx$, quand celle-ci sera donnée, au moyen des méthodes qui ont été exposées dans les articles précédents. Cela posé, d'après ce qu'on a vu dans les numéros 255 et suivants, une fonction quelconque peut toujours être regardée comme étant la somme d'un nombre infini de valeurs de sa différentielle. Ainsi, l'expression

$$C+F(x)$$

représente en général la somme d'un nombre infini de valeurs de la différentielle $f(x).dx$. Tant que la constante C demeure indéterminée la valeur de x à partir de laquelle on a commencé à sommer les différentielles est également indéterminée; et quant à la valeur de x à laquelle la somme se termine, c'est la valeur même de cette variable qui se trouve sous le signe de la fonction F.

Remarquons maintenant qu'un grand nombre de questions importantes exige la recherche de la somme d'un nombre infini de valeurs d'une différentielle proposée, cette somme étant prise depuis une certaine valeur x_0 de x, à partir de laquelle les différentielles successives sont supposées s'ajouter les unes aux autres, jusqu'à une autre valeur x_ω de cette même variable, au delà de laquelle on cesse d'ajouter les différentielles. Cette somme s'exprime analytiquement d'une manière générale comme il suit,

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.f(x);$$

en plaçant au-dessous du signe $\int$ la valeur de la variable à partir de laquelle les différentielles commencent à être ajoutées, et au-dessus de ce signe la valeur de la variable à laquelle cesse cette addition. L'expression dont il s'agit est ce qu'on nomme une *intégrale définie*, en entendant par-là que l'intégrale, ou la somme des différentielles, est prise entre des limites déterminées; x_0 est la *limite inférieure*, et x_ω la *limite supérieure* de l'intégrale. Les intégrales définies constituent d'ailleurs, comme on le verra dans la suite, un nouveau genre de fonctions dont l'usage est fort étendu dans l'analyse.

Par opposition aux *intégrales définies*, les géomètres donnent souvent le nom d'*intégrale indéfinie* à l'expression

$$C+F(x),$$

dont la recherche a été l'objet des articles précédents, qui satisfait simplement de la manière la plus générale à la condition d'avoir $f(x).dx$ pour différentielle, et qui représente la somme des valeurs de cette différentielle prise depuis une valeur indéterminée de x jusqu'à la valeur quelconque que l'on voudra attribuer à cette variable dans le terme $F(x)$. Or, la connaissance de l'intégrale indéfinie d'une différentielle proposée donne en général immédiatement celle d'une intégrale définie relative à cette même différentielle prise entre des limites quelconques. En effet si l'on fait $x=x_0$ dans l'expression $C+F(x)$, on aura

$$C+F(x_0)$$

pour exprimer la somme des valeurs de la différentielle $f(x),dx$ prises depuis une certaine valeur indéterminée de x jusqu'à la valeur x_0; et si l'on fait $x=x_\omega$ dans la

même expression, sans changer la constante C, on aura

$$C+F(x_\omega)$$

pour exprimer la somme des valeurs de cette différentielle prise depuis la même valeur indéterminée de x jusqu'à la valeur x_ω. Donc, la différence de ces deux expressions, c'est-à-dire

$$F(x_\omega)-F(x_0)$$

représente la somme des valeurs de la différentielle dont il s'agit, prise depuis la valeur x_0 de x jusqu'à la valeur x_ω.

On voit par ce qui précède que l'équation

$$d.F(x)=f(x).dx$$

entraîne généralement la suivante

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.f(x)=F(x_\omega)-F(x_0);$$

c'est-à-dire que l'on a la valeur d'une intégrale définie en retranchant l'une de l'autre les deux valeurs que prend l'intégrale indéfinie lorsqu'on y donne à la variable les valeurs correspondantes aux limites inférieure et supérieure entre lesquelles l'intégrale définie doit être prise.

304. Il résulte de ce qui précède que l'on obtient toujours facilement la valeur numérique d'une intégrale définie $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.f(x)$, lorsqu'on peut obtenir sous forme finie, ou en série convergente, la fonction $F(x)$, dont la

différentielle est $dx.f(x)$. Cela n'est pas toujours possible, et quand on ne peut y parvenir, on est obligé de calculer la valeur numérique dont il s'agit par des méthodes d'approximation qui seront exposées dans la suite. Dans les cas même où la fonction $F(x)$ peut être obtenue sous forme finie, l'usage des méthodes d'approximation est souvent préférable à la recherche directe de cette fonction.

305. Les notions précédentes deviendront très-sensibles si l'on considère, comme on l'a déjà fait dans le n° 256, la variable x comme l'abscisse, et la fonction $F(x)$, ou plus généralement $C+F(x)$, comme l'ordonnée d'une courbe. Une différentielle quelconque

$$d[C+F(x)]=f(x).dx$$

de cette fonction représente l'accroissement infiniment petit de l'ordonnée lorsqu'on passe de l'abscisse x à l'abscisse $x+dx$. La somme de ces accroissements de l'ordonnée qui ont lieu depuis une certaine valeur x_0 de x jusqu'à une autre valeur x_ω, est évidemment égale à l'excès de l'ordonnée répondant à la dernière limite sur l'ordonnée répondant à la première limite, c'est-à-dire à $y_\omega - y_0$ ou $F(x_\omega)-F(x_0)$.

306. Remarquons, d'ailleurs, que l'équation précédente

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.f(x)=F(x_\omega)-F(x_0),$$

dans laquelle $F(x)$ est telle que l'on a $d.F(x)=dx.f(x)$. ne s'applique pas aux cas où les fonctions $f(x)$ ou $F(x)$

deviendraient infinies pour une valeur de x comprise entre les limites x_0 et x_ω de l'intégrale définie. En effet lorsqu'on a exposé dans le n° 255 des considérations d'où il résultait qu'une intégrale quelconque représente toujours la somme d'un nombre infini de valeurs de la différentielle, on a dû exclure les cas où les fonctions dont il s'agit prendraient des valeurs infinies.

Lorsqu'on demande la valeur d'une intégrale définie $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.f(x)$, et qu'il arrive que la fonction $f(x)$ devient infinie pour une certaine valeur a de x comprise entre les limites x_0 et x_ω de l'intégrale, on ne peut en général obtenir la valeur cherchée qu'en partageant l'intégrale en deux parties, dont la première finit et dont la seconde commence à la valeur $x=a$, c'est-à-dire en considérant séparément les deux intégrales définies

$$\int_{x_0}^{a} dx.f(x) \qquad \text{et} \qquad \int_{a}^{x_\omega} dx.f(x),$$

dont la somme donnera la valeur demandée. Cette somme aura une valeur infinie si les deux parties ont elles-mêmes des valeurs infinies et de même signe, ou si l'une seulement des deux parties est infinie. Elle aura une valeur indéterminée si les deux parties ont des valeurs infinies de signes contraires. Enfin elle aurait une valeur finie déterminée si les deux parties avaient des valeurs finies.

De même, s'il se trouvait entre les limites x_0 et x_ω deux valeurs a et $a_{,}$, pour lesquelles $f(x)$ devînt infinie

on devrait partager de cette manière l'intégrale définie proposée,

$$\int_{x_0}^{a} dx.f(x)+\int_{a}^{a_1} dx.f(x)+\int_{a_1}^{x_\omega} dx.f(x),$$

et déterminer à part la valeur de chaque terme. Et ainsi de suite si le nombre des valeurs intermédiaires qui rendent $f(x)$ infinie était plus considérable.

307. Il résulte de ce qui précède qu'il revient au même de changer le signe dont une intégrale définie est affectée, ou de renverser l'ordre des limites. Ainsi

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.f(x)=-\int_{x_\omega}^{x_0} dx.f(x).$$

On peut d'ailleurs changer la variable x qui est sous le signe d'intégration définie, pourvu que l'on change en même temps les limites de manière à leur conserver les mêmes valeurs absolues. Si, par exemple, dans l'expression précédente, on veut remplacer x par une nouvelle variable t, en établissant entre ces deux quantités la relation quelconque $x=\varphi(t)$ on devra remplacer dx par $d.\varphi(t)$; et x_0, x_ω par les valeurs de t qui seraient déduites respectivement des équations $x_0=\varphi(t)$, $x_\omega=\varphi(t)$.

308. Nous remarquons enfin que la considération des intégrales définies peut servir à trouver le développement connu sous le nom de théorème de Taylor, et conduit à une expression remarquable de la partie que l'on néglige en s'arrêtant à un nombre déterminé de termes. D'après ce qui a été dit dans le n° 303 on aura,

quelle que soit la fonction f, pourvu que cette fonction soit continue entre les valeurs x et $x+h$ de la variable,

$$f(x+h)-f(x)=\int_x^{x+h} dx.f'(x),$$

$f'(x)$ désignant le coefficient différentiel ou la fonction dérivée du premier ordre de la fonction $f(x)$. Or, on peut remplacer dans l'intégrale définie du second membre x par $x+h-t$, en désignant par t une nouvelle variable, ce qui changera cette intégrale, en ayant égard à ce qui a été dit dans le numéro précédent, en

$$-\int_h^0 dt.f'(x+h-t), \qquad \text{ou} \qquad \int_0^h dt.f'(x+h-t);$$

en sorte qu'on peut écrire

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^h dt.f'(x+h-t).$$

Cela posé, considérons l'intégrale indéfinie

$$\int dt.f'(x+h-t):$$

en lui appliquant le procédé de l'intégration par parties, on trouvera successivement

$$\int dt.\ f'\ (x+h-t)=\ t\ .f'\ (x+h-t)+\int dt.\ t\ .f''(x+h-t),$$
$$\int dt.\ t\,f''(x+h-t)=\frac{t^2}{2}.f''(x+h-t)+\int dt.\frac{t^2}{2}.f'''(x+h-t),$$
$$\int dt.\frac{t^2}{2}f'''(x+h-t)=\frac{t^3}{2.3}.f'''(x+h-t)+\int dt.\frac{t^3}{2.3}.f^{\text{IV}}(x+h-t),$$

etc.

et par conséquent

$$\int dt. f'(x+h-t) = t.f'(x+h-t) + \frac{t^2}{2} f''(x+h-t) + \frac{t^3}{2.3} f'''(x+h-t) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{t^{\mu-1}}{2.3.4..(\mu-1)} f^{\mu-1}(x+h-t) + \int dt. \frac{t^{\mu-1}}{2.3.4..(\mu-1)} f^{\mu}(x+h\text{-}$$

Donc, en prenant l'intégrale entre les limites zéro et h,

$$\int_0^h dt. f'(x+h-t) = h.f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \frac{h^4}{2.3.4} f^{\text{IV}}(x) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)} f^{\mu-1}(x) + \int_0^h dt. \frac{t^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)} f^{\mu}(x+h$$

et en substituant cette valeur dans l'équation précédente, il viendra

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \frac{h^4}{2.3.4} f^{\text{IV}}(x) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)} f^{\mu-1}(x) + \int_0^h dt. \frac{t^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)} f^{\mu}(x+h-$$

Si l'on fait dans cette équation $x=0$, puis que l'on écrive x à la place de h, elle prendra la forme

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{2.3} f'''(0) + \frac{x^4}{2.3.4} f^{\text{IV}}(0) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)} f^{\mu-1}(0) + \int_0^x dt. \frac{t^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)} f^{\mu}(x-t).$$

Il est aisé de reconnaître d'ailleurs que cette nouvelle expression du terme complémentaire de la série de Taylor comprend celle qui a été présentée dans les numéros 85 et 86. Mais tandis que celle-ci est indéterminée, et fait seulement connaître les limites entre lesquelles la valeur du terme dont il s'agit est comprise, l'expression

sous forme d'intégrale définie détermine complétement cette valeur.

XXIX. USAGE DES INTÉGRALES DÉFINIES POUR L'ÉVALUATION DES LONGUEURS DES COURBES, DES AIRES ET DES VOLUMES.

1° Aires des courbes planes.

309. Considérons une courbe quelconque rapportée à deux axes rectangulaires. Proposons-nous de trouver l'aire de cette courbe, c'est-à-dire la valeur numérique de la surface comprise entre l'axe, la courbe et deux ordonnées quelconques. Désignons par

$$y = f(x)$$

l'équation de la courbe, et par x_0, x_ω les abscisses qui répondent aux ordonnées par lesquelles l'aire qu'il s'agit d'évaluer est limitée. On a trouvé dans le n° 156 qu'en désignant par u la fonction de x qui représentait la valeur de l'aire comptée d'une origine quelconque jusqu'à l'ordonnée correspondante à l'abscisse x, la différentielle de cette fonction était exprimée par

$$du = ydx.$$

Or l'aire qu'il s'agit d'évaluer est évidemment la somme des valeurs en nombre infini que prend la différentielle du lorsqu'on donne à x dans cette différentielle toutes ses valeurs comprises entre x_0 et x_ω. Donc, conformément à ce qu'on a vu dans l'article précédent, cette aire est exprimée par l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.y.$$

Il est entendu que dans cette expression les limites x_0 et x_ω sont deux nombres donnés correspondants aux positions des ordonnées qui terminent l'aire. Le résultat de l'opération indiquée par l'expression analytique dont il s'agit est également un nombre déterminé, représentant la valeur de cette aire.

Mais on peut aussi imaginer que la première limite x_0 est seule donnée et fixe, et que la seconde limite x_ω est indéterminée et arbitraire. Alors on représentera simplement cette seconde limite par x. Le résultat de l'intégration définie sera alors une fonction de x représentant l'aire qui commence à l'ordonnée correspondante à l'abscisse x_0, et qui se termine à une autre ordonnée quelconque correspondante à l'abscisse x. En désignant cette aire par u, nous écrirons donc

$$u=\int_{x_0}^{x} dx.y.$$

310. Si la courbe proposée est rapportée à des coordonnées polaires, son équation sera donnée sous la forme

$$r=f(\omega),$$

ω désignant l'angle compris entre le rayon vecteur dont la longueur est r et une ligne fixe. L'aire u est ici l'espace triangulaire compris entre la courbe et deux rayons vecteurs formant avec l'axe fixe, l'un l'angle ω_0, l'autre l'angle quelconque ω. Comme l'on a trouvé dans le n° 199

$$du=\frac{1}{2}r^2d\omega,$$

on aura donc ici

$$u=\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega\, r^2.$$

311. Soit, par exemple, l'ellipse rapportée à ses diamètres rectangulaires, dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{ou} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

a et b désignant les demi-diamètres 0A et 0B (fig. 45). L'aire 0Bmp sera exprimée d'après le n° 309 par

$$u=\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2-x^2},$$

x désignant l'abscisse $0p$. Pour obtenir la valeur de cette intégrale définie, il faut considérer l'intégrale indéfinie $\int dx\sqrt{a^2-x^2}$. On pourrait la rendre rationnelle en employant la transformation indiquée n° 276. Il serait plus simple de la mettre sous la forme $\int dx\,\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$, et de considérer à part les deux parties $\int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, -\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, dont la première s'intègre immédiatement d'après le n° 281, et dont la seconde s'intégrerait en la considérant comme une différentielle binôme, et opérant d'une manière semblable à ce qu'on a fait n° 287. Mais il sera plus simple encore de poser

$$\sqrt{a^2-x^2}=tx, \quad \text{d'où} \quad x^2=\frac{a^2}{1+t^2},$$

t désignant une nouvelle variable ; ce qui donne

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\int t.xdx=\frac{1}{2}tx^2-\frac{1}{2}\int dt.x^2=\frac{1}{2}tx^2-\frac{a^2}{2}\int\frac{dt}{1+}$$

par conséquent

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\mathrm{C}+\frac{1}{2}tx^2-\frac{a^2}{2}\text{arc tang.}\,t,$$

ou

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\mathrm{C}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}a^2.\text{arc tang.}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x};$$

puis en prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=x$,

$$\int_0^x dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\text{arc tang.}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2.\text{arc tang.}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2.\text{arc sin.}\frac{x}{a}.$$

L'expression de l'aire demandée est donc

$$u=\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{ab}{2}\text{arc sin.}\frac{x}{a}$$
$$=\frac{xy}{2}+\frac{ab}{2}\text{arc sin.}\frac{x}{a}.$$

Comme $\frac{xy}{2}$ est l'aire du triangle $0mp$, on voit que l'aire du secteur $0\mathrm{B}m$ est $\frac{ab}{2}$ arc sin. $\frac{x}{a}$. En faisant $x=a$, on aura $\frac{\pi ab}{4}$ pour l'aire 0BA, et par conséquent πab pour l'aire entière de l'ellipse.

312. Soit l'hyperbole rapportée à ses axes dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{ou} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

En désignant par u l'aire Apm (*fig.* 46), 0p représentant l'abscisse x, on aura

$$u=\frac{b}{a}\int_a^x dx\sqrt{x^2-a^2}.$$

Pour obtenir l'intégrale indéfinie $\int dx\sqrt{x^2-a^2}$, on fera comme ci-dessus,

$$\sqrt{x^2-a^2}=tx, \quad \text{d'où} \quad x^2=\frac{a^2}{1-t^2},$$

et

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2}=\int t.xdx=\frac{1}{2}tx^2-\frac{1}{2}\int dt.x^2=\frac{1}{2}tx^2-\frac{a^2}{2}\int\frac{dt}{1-t^2}.$$

Mais

$$\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int dt\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right):$$

donc

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2}=C+\frac{1}{2}tx^2+\frac{a^2}{4}.l\frac{1-t}{1+t},$$

ou

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2}=C+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{4}.l\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}};$$

$$=C+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}.l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right);$$

et en prenant l'intégrale depuis $x=a$ jusqu'à $x=x$, il vient

$$\int_a^x dx\sqrt{x^2-a^2}=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}.l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

L'expression de l'aire Amp dont il s'agit est donc

$$u=\frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{2}.l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$
$$=\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}.l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Comme $\frac{xy}{2}$ représente l'aire du triangle $0mp$, on voit que l'aire du secteur $0m$A est représentée par $\frac{ab}{2}.l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$. Cette aire devient infinie lorsque le point m s'éloignant à l'infini le rayon $0m$ se confond avec l'asymptote.

313. L'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes étant

$$xy=\frac{a^2}{2} \quad \text{ou} \quad y=\frac{a^2}{2x},$$

l'aire représentée par u, comprise entre les ordonnées correspondantes aux abscisses x_0, x, est exprimée par

$$u=\frac{a^2}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} \quad \text{ou} \quad u=\frac{a^2}{2}.\,l\,\frac{x}{x_0}.$$

Si l'on pose $a=1$, on a simplement

$$u=\frac{1}{2}.\,l\,\frac{x}{x_0}:$$

ainsi les logarithmes népériens des nombres donnent immédiatement les aires de l'hyperbole équilatère. C'est par cette raison que ces logarithmes ont été nommés *logarithmes hyperboliques*.

314. L'équation de la parabole, en comptant les ordonnées du sommet, est

$$y^2=2px \quad \text{ou} \quad y=\sqrt{2px}.$$

L'aire $0mp$ (fig. 47) est donc représentée par

$$u=\sqrt{2p}\int_0^x dx\sqrt{x},$$

qui revient à

$$u=\frac{2}{3}\sqrt{2p}.x^{\frac{3}{2}}, \quad \text{ou} \quad u=\frac{2}{3}xy.$$

L'aire $0mp$ est donc les $\frac{2}{3}$ du rectangle *ormp*; et l'aire *omr* en est le $\frac{1}{3}$.

315. Si l'on considère la courbe dont l'ordonnée est

$$y=a^x,$$

a désignant une constante positive, et plus grande que l'unité, l'expression de l'aire *mpqn* (fig. 48) représentée par u, et terminée aux abscisses $0p$ et $0q$, représentées par x_0 et x, sera

$$u=\int_{x_0}^x dx.a^x,$$

et comme l'on a l'intégrale indéfinie $\int dx\, a^x=\frac{a^x}{la}$, il viendra

$$u=\frac{a^x-a^{x_0}}{la}.$$

L'aire comptée à partir de 0B du côté des x positives sera donc $\frac{a^x-1}{la}$; et l'aire comptée à partir de 0B du

côté des x négatives sera $\frac{1-a^{-x}}{la}$. Cette dernière expression donne, en supposant $x=\frac{1}{0}$, $\frac{1}{la}$ pour l'aire comprise entre l'axe et la courbe prolongée à l'infini.

316. Dans la cycloïde (*fig.* 49), les coordonnées op, mp d'un point quelconque de la courbe étant représentées par x, y, on a, comme on l'a vu n° 178,

$$x=\mathrm{R}\,(\omega-\sin.\omega), \quad y=\mathrm{R}\,(1-\cos.\omega),$$

R désignant le rayon $\mathrm{C}r$ du cercle générateur, et ω l'angle $m\mathrm{C}r$. L'aire omp sera exprimée par

$$u=\int_0^x y dx \quad \text{ou} \quad u=\mathrm{R}^2\int_0^\omega d\omega(1-\cos.\omega)^2.$$

Mais on a

$$\int d\omega(1-\cos.\omega)^2=\int d\omega(1-2\cos.\omega+\cos.^2\omega)=\int d\omega\left(\frac{3}{2}-2\cos.\omega+\frac{1}{2}\cos.2\omega\right)$$
$$=\frac{3}{2}\,\omega-2\sin.\omega+\frac{1}{4}\sin.2\omega.$$

Donc

$$u=\mathrm{R}^2\left(\frac{3}{2}\,\omega-2\sin.\omega+\frac{1}{4}\sin.2\omega\right).$$

Cette formule donnera la totalité de l'aire $omna$, comprise entre la première partie de la cycloïde et l'axe $0a$, en y faisant $\omega=2\pi$. La valeur de cette aire est donc $3\pi\mathrm{R}^2$, c'est-à-dire le triple de l'aire du cercle générateur.

On peut remarquer d'ailleurs que l'aire

$$0qtm=0qtp-0mp=2\mathrm{R}x-u$$
$$=\frac{\mathrm{R}^2}{2}(\omega-\sin.\omega\cos.\omega):$$

donc l'espace $0qtm$ est égal à la partie rms du cercle générateur, et par conséquent l'espace $0qtnm$ est égal à la moitié du cercle générateur.

317. On pourra toujours, au moyen de l'opération qui vient d'être expliquée, évaluer une aire quelconque comprise dans un contour tracé sur un plan. Car soit Mm_1Nm_2 (*fig.* 50) le contour dont il s'agit, rapporté à des coordonnées rectangulaires. Désignons par x_0, x_ω les abscisses extrêmes 0P, 0Q; par x une abscisse quelconque $0p$, et par y_1 et y_2 les ordonnées m_1p et m_2p correspondantes à cette abscisse, et appartenant respectivement aux deux courbes Mm_1N et Mm_2N qui forment le contour. Ces ordonnées doivent être données en fonctions de x, et il est visible d'après ce qui précède que l'aire Mm_1Nm_2 est exprimée par l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx(y_2-y_1).$$

Si le contour Mm_1Nm_2 est discontinu, et composé de parties distinctes, dont les ordonnées ne soient pas exprimées par une même fonction de l'abscisse x, on pourra partager l'aire proposée, et l'intégrale définie qui en exprime la valeur, en plusieurs parties correspondantes respectivement aux portions du contour dont les ordonnées ont une expression commune. La valeur de chacune de ces parties se calculera séparément. Dans les cas mêmes où les ordonnées du contour ne sont pas données par une ou plusieurs expressions analytiques formées de l'abscisse x, mais où l'on connaît seulement les valeurs numériques des ordonnées de certains points de ce contour, il existe, comme on le verra dans la suite, des

méthodes au moyen desquelles on peut évaluer approximativement l'intégrale définie par laquelle l'aire est représentée.

318. Pour présenter une application de la formule du n° 310, nous considérerons la spirale logarithmique, dont l'équation donnée n° 204 est

$$r = e^{la.\omega}.$$

L'aire triangulaire comprise entre la courbe et les deux rayons vecteurs r et r_0 qui forment entre eux l'angle $\omega - \omega_0$ sera donc

$$u = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . e^{2la.\omega},$$

c'est-à-dire

$$u = \frac{e^{2la.\omega} - e^{2la.\omega_0}}{4.la}, \quad \text{ou} \quad u = \frac{r^2 - r_0^2}{4.la}.$$

Dans les cas particuliers où $la=1$, et $r=e^{\omega}$, l'aire dont il s'agit est donc le $\frac{1}{4}$ de la différence des carrés construits sur les deux rayons vecteurs.

2° Longueurs des courbes planes.

319. En appliquant ici les considérations qui ont été présentées dans le n° 309, et se rappelant que l'on a trouvé dans le n° 157 que la différentielle de l'arc d'une courbe rapportée aux coordonnées rectangulaires x, y, et représentée par l'équation

$$y = f(x),$$

était exprimée par

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

on aura évidemment l'intégrale définie

$$s=\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

pour l'expression générale de la longueur de l'arc de la courbe compris entre les points correspondants aux abscisses x_0 et x.

320. De même, si la courbe est rapportée à des coordonnées polaires, et représentée par l'équation

$$r=f(\omega);$$

comme on a trouvé dans le n° 200,

$$ds=d\omega\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}$$

pour l'expression de la différentielle de l'arc, on aura

$$s=\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2},$$

pour l'expression générale de la longueur de l'arc de la courbe compris entre les points correspondants aux valeurs ω_0 et ω de l'angle qui détermine la direction du rayon vecteur.

321. Si l'on considère, par exemple, comme dans le n° 312, l'ellipse rapportée à ses diamètres rectangulaires, dont l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ donne } y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ \frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

il viendra

$$s=\int_0^x dx\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}},$$

pour l'expression de l'arc compté du sommet de la courbe jusqu'au point dont l'abscisse est x. En introduisant l'excentricité désignée par e dans le n° 197, ou faisant $a^2-b^2=a^2e^2$, cette expression s'écrira

$$s=\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}.$$

On ne peut pas l'obtenir sous forme finie, mais on peut la développer en série convergente de diverses manières. Remarquant, par exemple, que $\frac{x}{a}$ est toujours une fraction, on peut poser $x=a\cos.\varphi$, d'où $dx=-a\sin.\varphi d\varphi$, et

$$s=-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-e^2\cos.^2\varphi};$$

ou en développant $(1-e^2\cos.^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$,

$$s=a\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi\left(\frac{e^2}{2}\cos.^2\varphi+\frac{1}{2}\frac{e^4}{4}\cos.^4\varphi+\frac{1.3}{2.4}\frac{e^6}{6}\cos.^6\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{e^8}{8}\cos.^8\varphi+\right.$$

Or, on a, par la seconde des formules écrites n° 294,

$$\int d\varphi.\cos.^2\varphi=\frac{1}{2}\sin.\varphi.\cos.\varphi+\frac{1}{2}\varphi+C,$$

$$\int d\varphi.\cos.^4\varphi=\frac{1}{4}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi+\frac{1.3}{2.4}\sin.\varphi.\cos.\varphi+\frac{1.3}{2.4}\varphi+C,$$

$$\int d\varphi.\cos.^6\varphi=\frac{1}{6}\sin.\varphi.\cos.^5\varphi+\frac{1.5}{4.6}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\sin.\varphi.\cos.\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi+C$$

$$.\cos.^8\varphi=\frac{1}{8}\sin.\varphi.\cos.^7\varphi+\frac{1.7}{6.8}\sin.\varphi.\cos.^5\varphi+\frac{1.5.7}{4.6.8}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin.\varphi.\cos.\varphi+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varphi+C,$$

etc.;

et en prenant les intégrales depuis $\varphi=\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\varphi=\varphi$,

$$\varphi.\cos.^2\varphi=\frac{1}{2}\sin.\varphi.\cos.\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

$$\varphi.\cos.^4\varphi=\frac{1}{4}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi+\frac{1.3}{2.4}\sin.\varphi.\cos.\varphi-\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

$$\varphi.\cos.^6\varphi=\frac{1}{6}\sin.\varphi.\cos.^5\varphi+\frac{1.5}{4.6}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\sin.\varphi.\cos.\varphi-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

$$\varphi.\cos.^8\varphi=\frac{1}{8}\sin.\varphi.\cos.^7\varphi+\frac{1.7}{6.8}\sin.\varphi.\cos.^5\varphi+\frac{1.5.7}{4.6.8}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin.\varphi.\cos.\varphi-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

etc.;

ce qui donne les valeurs de chaque terme de la série précédente.

Si l'on suppose $x=a$, et par conséquent $\cos.\varphi=1$ ou $\varphi=0$, l'expression précédente de s donnera pour la longueur du quart du contour de l'ellipse :

$$\frac{\pi a}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2-\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2-\text{etc.}\right].$$

322. L'équation de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{donne} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\ \frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

et par conséquent

$$s=\int_a^x dx\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{x^2-a^2}}=\int_a^x dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{a^2(x^2-a^2)}};$$

ou, en faisant $a^2+b^2=a^2e^2$,

$$s=\int_a^x dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}$$

pour l'expression de l'arc compté du sommet de la courbe jusqu'au point dont l'abscisse est x. Comme ici x est toujours $>a$, nous poserons $x=\frac{a}{\cos.\varphi}$, d'où $dx=\frac{a\sin.\varphi d\varphi}{\cos.\varphi^2}$, et

$$s=a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}\sqrt{e^2-\cos.^2\varphi}=a\int_0^\varphi d\varphi\,\frac{e}{\cos.^2\varphi}\sqrt{1-\frac{\cos.^2\varphi}{e^2}}.$$

Ou, en développant $\left(1-\frac{\cos.^2\varphi}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$s=a\int_0^\varphi d\varphi.\frac{e}{\cos.^2\varphi}\Big(1-\frac{1}{2e^2}\cos.^2\varphi-\frac{1}{2}\frac{1}{4e^4}\cos.^4\varphi$$
$$-\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6e^6}\cos.^6\varphi-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8e^8}\cos.^8\varphi-\text{etc.}\Big);$$

ou

$$s=ae.\,\text{tang}.\varphi-\frac{a}{2e}\varphi-a\int_0^\varphi d\varphi\Big(\frac{1}{2}\frac{1}{4e^3}\cos.^2\varphi$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6e^5}\cos.^4\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8e^7}\cos.^6\varphi+\text{etc.}\Big).$$

Les termes de la série seront donnés par les expressions de $\int d\varphi.\cos.^2\varphi$, $\int d\varphi.\cos.^4\varphi$, etc. du numéro précédent, en supposant la constante arbitraire C égale à zéro.

Remarquons que l'équation de l'asymptote étant $y=\frac{b}{a}x$, la distance du centre de la courbe au point de l'asymptote dont l'abscisse est x, est $\frac{\sqrt{a^2+b^2}.x}{a}=ex=\frac{ae}{\cos.\varphi}$. Soit r cette distance : on aura

$$r-s=ae\frac{1-\sin.\varphi}{\cos.\varphi}+\frac{a}{2e}\varphi+a\int_0^\varphi d\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{1}{4e^3}\cos.^2\varphi\right.$$
$$\left.+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6e^5}\cos.^4\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8e^7}\cos.^6\varphi+\text{etc.}\right).$$

Si l'on suppose $x=\frac{1}{0}$, et par conséquent $\cos.\varphi=0$ ou $\varphi=\frac{\pi}{2}$, cette dernière formule donnera pour la limite vers laquelle tend l'excès de r sur s, à mesure que l'abscisse x devient de plus en plus grande $\left(\text{en remarquant que } \frac{1-\sin.\varphi}{\cos.\varphi}=\frac{\cos.\varphi}{1+\sin.\varphi}=0 \text{ lorsque } \varphi=\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\frac{\pi a}{4e}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{e}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{e^2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{e^3}\right)^2+\text{etc.}\right].$$

323. L'équation de la parabole

$$y^2=2px \quad \text{donne} \quad y=\sqrt{2px},\ \frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Ainsi, l'arc compris entre le sommet de la courbe et le point dont x est l'abscisse a pour expression,

$$s=\int_0^x dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}.$$

L'intégrale indéfinie $\int dx \sqrt{1+\frac{p}{2x}}$ se trouvera en posant

$$\sqrt{1+\frac{p}{2x}}=t, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{p}{2(t^2-1)};$$

et

$$\int dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}=\int dx.t=xt-\int xdt=xt-\frac{p}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}.$$

Comme l'intégrale $\int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int dt\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)$, il vient

$$\int dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}=xt-\frac{p}{4}.\,l\frac{t-1}{t+1}+C$$

$$=x\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-\frac{p}{4}.\,l\frac{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-1}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}+1}+C;$$

et en prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=x$, on a

$$s=x\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-\frac{p}{4}.\,l\,\frac{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-1}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}+1},$$

ou

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{2px+4x^2}+\frac{1}{2}p.\,l.\frac{2x+\sqrt{2px+4x^2}}{p}.$$

324. Soit maintenant comme dans le n° 316 la courbe dont l'équation est

$$y=a^x, \quad \text{et donne } \frac{dy}{dx}=la.a^x=la.y;$$

on aura donc

$$s=\int_{x_0}^{x_n} dx\sqrt{1+(la.a^x)^2}$$

pour la longueur de l'arc dont les extrémités correspondent aux abscisses x_0 et x. Pour trouver la valeur de cette intégrale définie, nous poserons

$$\frac{dy}{dx}=la.y=\text{tang}.\tau, \text{ d'où } la.dy=\frac{d\tau}{\cos.^2\tau}, \quad dx=\frac{1}{la}\frac{dy}{y}=$$
$$\frac{1}{la}\frac{d\tau}{\sin.\tau.\cos.\tau.};$$

et

$$s=\frac{1}{la}\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{\sin.\tau.\cos.^2\tau}.$$

Mais, par la quatrième des formules données n° 293,

$$\int\frac{d\tau}{\sin.\tau.\cos.^2\tau}=\frac{1}{\cos.\tau}+\int\frac{d\tau}{\sin.\tau},$$

et par l'une des formules du n° 295, on trouve

$$\int\frac{d\tau}{\sin.\tau}=l.\text{tang}.\frac{\tau}{2}+\text{C}.$$

Donc

$$s=\frac{1}{la}\left(\frac{1}{\cos.\tau}-\frac{1}{\cos.\tau_0}+l\frac{\text{tang}.\frac{\tau}{2}}{\text{tang}.\frac{\tau_0}{2}}\right).$$

Il est sans doute superflu de remarquer que

τ=arc tang. $(la.y)$ est ici l'angle formé avec l'axe des x par la tangente menée à la courbe dans le point dont l'abscisse est x.

325. Soit encore comme au numéro 316, la cycloïde dont l'équation a été donnée n° 179 (*fig.* 49). On aura

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{y}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{y}{\sqrt{2Ry-y^2}}.$$

Or la différentielle $dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ de l'arc d'une courbe pouvant également s'exprimer par $dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, nous pouvons représenter ici par

$$s=\int_0^y dy\sqrt{1+\frac{y^2}{2Ry-y^2}}=\sqrt{2R}\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{2R-y}},$$

la longueur de l'arc compris entre l'origine de la courbe et le point dont l'ordonnée est y. Et comme on a

$$\int\frac{dy}{\sqrt{2R-y}}=-2\sqrt{2R-y}+C,$$

il vient

$$s=4R-2\sqrt{2R}\sqrt{2R-y}.$$

Cette formule donnera la longueur de la moitié de la courbe en y faisant y=2R. Cette moitié est donc égale à 4R, comme on l'a déjà remarqué n° 191. Si d'ailleurs on voulait compter l'ordonnée y de haut en bas, à partir de la ligne nq, et l'arc s à partir du point n dans le sens nmo, on devrait écrire 2R—y à la place de y et 4R—s à la place de s, ce qui donnerait

$$s=2\sqrt{2Ry}.$$

326. Nous considérerons enfin la spirale logarithmique dont l'équation, rapportée aux coordonnées polaires, est

$$r=e^{la.\omega}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dr}{d\omega}=la.e^{la.\omega}=la.r.$$

Il viendra, d'après ce qui a été dit n° 320,

$$s=\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega\sqrt{r^2+(la)^2.r^2}=\sqrt{1+(la)^2}\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega.e^{la.\omega},$$

c'est-à-dire

$$s=\frac{\sqrt{1+(la)^2}}{la}(r-r_0),$$

pour la longueur de l'arc compris entre les points de la courbe auxquels appartiennent les rayons vecteurs r_0 et r. Comme l'angle compris entre la normale et la courbe a pour tangente trigonométrique, d'après le n° 204, $-la$, l'angle compris entre la tangente et la courbe a pour tangente trigonométrique $\frac{1}{la}$, et pour cosinus $\frac{la}{\sqrt{1+(la)^2}}$. Il est évident en effet, par la nature de la courbe dont il s'agit, que la différence de deux rayons vecteurs est à la longueur de l'arc qu'ils comprennent dans un rapport constant exprimé par ce cosinus.

Lorsque l'équation de la spirale logarithmique est simplement $r=e^{\omega}$, on a $s=\sqrt{2}\,(r-r_0)$. La longueur de l'arc compris entre deux points quelconques de la courbe est la différence des diagonales des carrés construits sur les rayons vecteurs appartenant à ces points.

3° Longueurs des courbes à double courbure.

327. Une courbe à double courbure étant donnée par les équations

$$y=f(x), \qquad z=F(x),$$

on a trouvé dans le n° 227, pour l'expression générale de la différentielle de cette courbe,

$$ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

D'après les principes établis au commencement de cet article, on aura donc

$$s=\int_{x_0}^{x}dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

pour l'expression de la longueur de l'arc de la courbe dont les deux extrémités répondent aux abscisses x_0 et x.

328. Soit, par exemple, l'hélice représentée par les équations

$$x=R\cos.\omega, \qquad y=R\sin.\omega, \qquad z=aR\omega,$$

qui donnent

$$dx=-R\sin.\omega.d\omega, \quad dy=R\cos.\omega.d\omega, \quad dz=aRd\omega.$$

L'expression précédente prendra la forme

$$s=R\sqrt{1+a^2}\int_{\omega_0}^{\omega}d\omega = R\sqrt{1+a^2}(\omega-\omega_0),$$

résultat qu'il est aisé de prévoir d'après la nature de la courbe.

4° Volumes des solides de révolution.

329. Supposons que l'axe d'un solide de révolution coïncide avec l'axe des x, et représentons par

$$y=f(x)$$

l'équation de la courbe plane dont la révolution autour de cet axe décrit la surface du solide. Désignons par v la partie du volume du solide comprise entre deux plans menés perpendiculairement à l'axe $0x$ (*fig.* 51) par les points P,p, et qui est décrite par la révolution de la partie PMmp de l'aire de la courbe génératrice. Soit x l'abscisse $0p$. Il est visible que quand x augmentera de Δx représentée sur la figure par pq, le volume v augmentera d'une quantité Δv égale au volume décrit par la révolution de l'aire $pmnq$. Or ce volume, (en supposant Δx assez petite pour que y soit constamment croissante ou décroissante dans l'intervalle pq) est compris entre ceux des deux cylindres ayant pour hauteur commune pq, et pour rayons pm et qn. Donc on a

$$\Delta v>\pi y^2.\Delta x, \qquad \Delta v<\pi(y+\Delta y)^2.\Delta x;$$

ou bien

$$\frac{\Delta v}{\Delta x}>\pi y^2, \qquad \frac{\Delta v}{\Delta x}<\pi(y+\Delta y)^2;$$

et comme ces deux expressions ont pour limite commune, lorsque Δx devient de plus en plus petite, πy^2, nous devons en conclure

$$\frac{dv}{dx}=\pi y^2, \qquad \text{ou} \qquad dv=\pi y^2.dx.$$

pour l'expression générale de la différentielle du volume représenté par v.

D'après cela l'on reconnaît immédiatement que l'intégrale définie

$$v=\pi\int_{x_0}^{x} dx.y^2,$$

donne l'expression de la partie du volume d'un solide de révolution qui est comprise entre deux plans menés perpendiculairement à l'axe aux distances x_0 et x de l'origine des coordonnées.

330. Soit par exemple l'ellipsoïde de révolution dont l'axe de révolution est $2a$, et dont l'axe perpendiculaire à celui-ci est $2b$. L'équation de la courbe génératrice, en comptant les x du centre, est

$$y=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2).$$

Donc

$$v=\pi\,\frac{b^2}{a^2}\int_{0}^{x} dx(a^2-x^2),$$

représente la partie du volume du corps comprise entre le plan perpendiculaire à l'axe qui passe par le centre et le plan mené à la distance x de celui-ci. Cette formule donne d'ailleurs

$$v=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right).$$

En faisant $x=a$, on aura $\frac{2\pi}{3}ab^2$ pour le volume de la moitié de l'ellipsoïde de révolution. Le volume entier de ce corps est donc $\frac{4\pi}{3}ab^2$.

331. On calculera facilement d'après ce qui précède le volume de tout solide décrit par la révolution d'une figure plane quelconque autour d'un axe pris dans le plan de cette figure. Le volume du solide décrit par la révolution de l'aire $Mm_1 Nm_2$ (*fig.* 52) tracée dans le plan des xy autour de l'axe des x, est exprimé par l'intégrale définie

$$\pi\int_{x_0}^{x_\omega} dx(y_2^2-y_1^2),$$

x_0 et x_ω représentant la plus petite valeur 0P et la plus grande valeur 0Q de l'abscisse x, et y_1, y_2 les valeurs des ordonnées m_1p, m_2p des deux lignes Mm_1N, Mm_2N qui répondent à une abscisse quelconque x.

5° Aires des surfaces de révolution.

332. Considérons la surface décrite par une courbe plane quelconque Mm dont l'équation est

$$y=f(x),$$

lorsque cette courbe tourne autour de l'axe $0x$ (*fig.* 51). Désignons par u l'aire de la partie de cette surface décrite par la révolution de la partie Mm de la courbe. Soit x l'abscisse $0p$. Lorsque x augmentera de l'intervalle infiniment petit dx représenté sur la figure par pq, l'aire u augmentera de l'aire décrite par la révolution de l'élément mn ou ds. Or, la courbe étant regardée comme coïncidant avec sa tangente dans l'étendue de cet élément, l'accroissement de u dont il s'agit sera regardé comme égal à la surface d'un cône tronqué dont pq est la hauteur et dont mp et nq sont les rayons des deux bases.

Donc

$$du = \pi(2y+dy)\,ds,$$

et en supprimant les quantités infiniment petites du second ordre

$$du = 2\pi y.ds \qquad \text{ou} \qquad du = 2\pi.dx.y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ainsi nous aurons

$$u = 2\pi\int_{x_0}^{x} dx.y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

pour l'expression de l'aire de la surface de révolution qui est comprise entre deux plans menés perpendiculairement à l'axe aux distances x_0 et x de l'origine des coordonnées.

333. Soit encore pris pour exemple l'ellipsoïde de révolution considéré dans le numéro 330. L'équation de la courbe génératrice donnant

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

il viendra

$$u = 2\pi\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}\,x^2},$$

pour l'expression de l'aire de la partie de la surface comprise entre le plan perpendiculaire à l'axe qui passe par le centre et un autre plan mené à la distance x de celui-ci. Supposons d'abord $a>b$, c'est-à-dire que l'ellipse a tourné autour de son grand axe, et posons $\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$; cette expression deviendra

$$u=2\pi\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2-e^2x^2};$$

et si l'on écrit

$$u=2\pi\frac{b}{ae}\int_0^x edx\sqrt{a^2-e^2x^2},$$

on trouvera par le numéro 311,

$$u=2\pi\frac{b}{ae}\left(\frac{1}{2}ex\sqrt{a^2-e^2x^2}+\frac{1}{2}a^2.\text{ arc sin. }\frac{ex}{a}\right)$$

$$=\pi b\left(x\sqrt{1-\frac{e^2x^2}{a^2}}+\frac{a}{e}.\text{ arc sin. }\frac{ex}{a}\right).$$

En faisant $x=a$, il viendra

$$\pi ab\left(\sqrt{1-e^2}+\frac{1}{e}\text{ arc sin. }e\right),$$

ou

$$\pi\left(b^2+\frac{ab}{e}\text{ arc sin. }e\right),$$

pour l'aire de la moitié de la surface de l'ellipsoïde.

Supposons en second lieu $a<b$, c'est-à-dire que l'ellipse a tourné autour de son petit axe. En désignant toujours par e l'excentricité, on posera donc $\frac{b^2-a^2}{b^2}=e^2$, et il viendra

$$u=2\pi\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}},$$

qui peut s'écrire

$$u=\frac{2\pi}{e}\int_0^x\frac{be.dx}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}.$$

On trouvera d'ailleurs, comme dans le numéro 312, l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{be.dx}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}} = C + \frac{bex}{2a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}} + \frac{a^2}{2}.\,l\left(\frac{bex}{a}+\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2 \ldots}{a \ldots}}\right.$$

et en prenant l'intégrale de $x=0$ à $x=x$,

$$\int_0^x \frac{be.dx}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}} = \frac{bex}{2a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}} + \frac{a^2}{2}.\,l\,\frac{\frac{bxe}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}}{a}.$$

Donc

$$u = \pi\left[\frac{bx}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}} + \frac{a^2}{e}.\,l\,\frac{\frac{bex}{a}+\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}}{a}\right]$$

$$= \pi b\left[x\sqrt{1+\frac{b^2e^2x^2}{a^4}} + \frac{a^2}{be}.\,l\left(\frac{bex}{a^2}+\sqrt{1+\frac{b^2e^2x^2}{a^4}}\right)\right].$$

En faisant $x=a$, il viendra

$$\pi ab\left[\sqrt{1+\frac{b^2e^2}{a^2}} + \frac{a}{be}.\,l\left(\frac{be}{a}+\sqrt{1+\frac{b^2e^2}{a^2}}\right)\right],$$

ou

$$\pi\left[b^2+\frac{a^2}{2e}.\,l\,(1+e)\frac{b}{a}\right],$$

pour l'aire de la moitié de la surface de l'ellipsoïde.

334. On pourra calculer, d'après ce qui précède, l'aire de la surface d'un solide de révolution décrit par une courbe plane quelconque tournant autour d'un axe tracé dans le plan de cette courbe. En conservant ici les dénominations du numéro 331, l'aire de la surface décrite par la révolution de la courbe Mm_1Nm_2 (*fig.* 52) autour de l'axe $0x$, sera évidemment représentée par l'intégrale définie

$$2\pi\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left[y_1\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2}-y_2\sqrt{1+\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2}\right].$$

6° Volumes des solides d'une figure quelconque.

335. Soit un solide dont la surface rapportée aux coordonnées rectangulaires x, y, z, est représentée par l'équation

$$z=f(x,y):$$

on présentera de la manière la plus générale la question de l'évaluation du volume de ce solide si, ayant tracé sur le plan des xy (*fig.* 52), un contour quelconque Mm_1Nm_2, on demande le volume compris entre le plan des xy, la surface du corps, et le cylindre dont le contour Mm_1Nm_2 est la base et dont les arêtes sont parallèles à l'axe des z. Nous représenterons par x_0 et x_ω les abscisses extrêmes 0P et 0Q de la ligne Mm_1Nm_2; par y_1 et y_2 les ordonnées m_1p et m_2p, qui répondent à l'abscisse $0p$ représentée par x, et qui appartiennent respectivement aux branches Mm_1N et Mm_2N de cette ligne. Les quantités y_1 et y_2 seront des fonctions données de l'abscisse x.

Cela posé, considérons la partie du volume demandé dont la base sur le plan des xy est Mm_1m_2, et désignons par v sa valeur, qui sera une fonction de x. Lorsque l'abscisse $0p$, ou x, augmentera de la quantité infiniment petite dx représentée sur la figure par pq, le volume v augmentera d'une partie également infiniment petite, dont la base sur le plan des xy est $m_1n_1n_2m_2$. Donc cette partie représente la différentielle dv. Et il résulte des notions présentées au commencement de cet article que l'on a

$$v = \int_{x_0}^{x} dv,$$

et que le volume entier dont le contour Mm_1Nm_2 est la base est exprimé par

$$\int_{x_0}^{x_n} dv.$$

Il s'agit maintenant d'exprimer analytiquement cette différentielle dv, c'est-à-dire la partie infiniment petite du volume demandé, dont la base est $m_1n_1n_2m_2$, partie qui n'est autre chose que la tranche de ce volume comprise entre deux plans menés parallèlement au plan des yz, aux distances x et $x+dx$ de ce plan. Considérons un point quelconque m pris sur la ligne m_1m_2 : soit y la coordonnée mp de ce point : $z=f(x,y)$ représentera l'ordonnée de la surface par laquelle le corps est terminé, qui répond au point m. D'ailleurs, considérons la partie $m_1n_1\,vm$ de la tranche qu'il s'agit d'évaluer, partie qui est évidemment une fonction de l'ordonnée mp, ou y. Il est visible que quand y croîtra de la quantité infiniment petite dy représentée sur la figure par $m\mu$, la partie $m_1n_1\,vm$ de la tranche dont il s'agit croîtra d'une portion de volume infiniment petite du second ordre, dont la base est le rectangle $mvn\mu$. Mais le volume dont il s'agit est évidemment compris entre deux prismes rectangulaires dont la base commune est $mvn\mu$, dont l'un a pour hauteur la plus petite des ordonnées qui répondent aux quatre points m, v, n, μ, et l'autre a pour hauteur la plus grande de ces ordonnées. Et comme ces deux hauteurs ne diffèrent de l'ordonnée z du point m que d'une quantité infiniment petite, on doit les regarder

comme égales à z, par conséquent prendre le produit $dx.dy.z$ pour l'expression de l'accroissement que subit la portion de la tranche dont la base est $m_1n_1\nu m$, lorsque y augmente de dy. Nous regarderons donc cette tranche comme la somme d'un nombre infini de différentielles exprimées par $dx.dy.z$, expression dans laquelle dx est un facteur constant et commun. Il en résultera que si l'on prend l'intégrale $dx\int dy.z$ entre deux limites correspondantes aux points m_1 et m_2, c'est-à-dire depuis $y=y_1$ jusqu'à $y=y_2$, on aura un résultat qui ne différera du volume de la tranche cherchée que d'une quantité infiniment petite du second ordre, qui doit être négligée par rapport à ce volume, qui est infiniment petit du premier ordre. Nous écrirons donc

$$d\nu=dx\int_{y_1}^{y_2}dy.z;$$

et en substituant cette valeur dans l'expression précédente de ν, il viendra

$$\nu=\int_{x_0}^{x}dx\int_{y_1}^{y_2}dy.z,$$

pour l'expression générale de la partie du volume demandé comprise entre des plans menés parallèlement au plan des yz, aux distances x_0 et x de l'origine des coordonnées. On aura, d'après cela,

$$\int_{x_0}^{x_\omega}dx\int_{y_1}^{y_2}dy.z$$

pour l'expression de la totalité de ce volume.

Ces formules sont appelées *intégrales définies doubles* parce qu'elles se rapportent aux deux variables x,y. On en déterminera toujours la valeur au moyen des procédés exposés dans les articles précédents. En effet, après avoir substitué pour z la valeur $f(x,y)$, on prendra par rapport à y l'intégrale indéfinie $\int dy.f(x,y)$, en regardant x comme une constante. Cette intégrale devant être prise entre les limites, y_1, y_2, qui représentent des fonctions données de x, le résultat de l'opération sera une fonction de x seule. Soit $\phi(x)$ cette fonction : il ne restera plus qu'à prendre l'intégrale $\int_{x_0}^{X} dx.\phi(x)$.

Remarquons, d'ailleurs, que l'on ne change rien à la valeur d'une intégrale définie double en intervertissant l'ordre des intégrations successives qui ont lieu par rapport à chacune des variables. On a toujours

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_1}^{y_2} dy.z = \int_{y_0}^{y_\omega} dy \int_{x_1}^{x_2} dx.z;$$

en désignant par x_1 et x_2 les valeurs de x en y, tirées de l'équation de la courbe MN, appartenant respectivement aux deux parties de cette courbe qui limitent l'intégrale dans le sens des x, et par y_0 et y_ω les valeurs extrêmes de l'ordonnée y appartenant à la même courbe. Il est visible, en effet, que l'une ou l'autre de ces expressions donne également la valeur du volume cherché. Mais il ne faut pas perdre de vue que l'usage des expressions dont il s'agit suppose en général qu'il n'y ait aucune des valeurs de l'ordonnée z qui soit infinie dans les limites de l'intégrale. S'il en était autrement, on ne pour-

rait en obtenir la valeur qu'en la décomposant en parties distinctes, séparées par les ordonnées dont il s'agit. Si les valeurs de ces parties sont exprimées par des nombres infinis et de signes contraires, la valeur de leur somme, et par conséquent celle de l'intégrale proposée, est indéterminée.

336. Admettons maintenant que la surface du solide soit rapportée à des coordonnées polaires. Nous regarderons la position d'un point quelconque m (*fig.* 53) de cette surface, comme étant donnée : 1° par la longueur r du rayon vecteur $0m$ dirigé sur ce point de l'origine 0 des coordonnées ; 2° par l'angle φ que la projection $0m'$ de ce rayon vecteur sur le plan des xy forme avec l'axe des x ; 3° par l'angle ψ que le même rayon vecteur $0m$ forme avec cette projection. Enfin nous supposerons que la surface du solide est donnée par l'équation

$$r=f(\varphi,\psi).$$

On résoudra d'ailleurs la question dont il s'agit d'une manière aussi générale qu'il est nécessaire, si l'on détermine le volume compris dans un cône ayant pour sommet l'origine ou pôle 0, et pour base une portion quelconque donnée de la surface du solide. Le contour de cette base doit être déterminé, et il le sera si l'on conçoit qu'à une valeur arbitraire attribuée à l'angle φ, répondent deux valeurs ψ_1 et ψ_2 de l'angle ψ, qui appartiennent respectivement aux deux points du contour situés sur la branche inférieure et sur la branche supérieure.

Cela posé, soit un point quelconque m de la surface du solide, déterminé par les coordonnées φ, ψ et r. Supposons que φ augmente de $d\varphi$, représentée sur la figure par

l'angle $m'0\mu'$; et que ψ augmente de $d\psi$, représentée sur la figure par l'angle $m0\nu$. Considérons la pyramide dont le sommet est le pôle 0, et qui a pour base le rectangle $m\mu n\nu$ dont le plan est perpendiculaire au rayon $0m$. Comme le côté $m\mu$ de cette base est égal à sa projection $m'\mu'$ sur le plan des xy, et comme $0\mu'$ est égal à $r\cos.\psi$, il s'ensuit que ce côté $m\mu = r\cos.\psi.d\varphi$. Le côté $m\nu$ est égal à $r.d\psi$. Donc le volume de cette pyramide est

$$\frac{1}{3}\, r\cos.\psi.d\varphi.rd\psi.r,$$

ou

$$\frac{1}{3}\, d\varphi.d\psi.\cos.\psi.r^3;$$

et il est évident qu'il ne diffère que d'un infiniment petit du troisième ordre, du volume compris entre les faces latérales de la même pyramide et la surface du corps.

Donc premièrement, si l'on prend l'intégrale

$$\frac{1}{3}\, d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi.\cos.\psi.r^3,$$

on aura le volume de la tranche du solide comprise entre les deux plans passant par l'axe des z, dont les traces sur le plan des xy sont $0m'$ et $0\mu'$.

Et en second lieu, si l'on prend l'intégrale

$$\frac{1}{3} \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi.\cos.\psi.r^3,$$

on aura le volume de la partie du solide comprise entre les plans passant par l'axe des z, qui forment avec le plan

des xz les angles φ_0 et φ. Par conséquent, si φ_0 et φ_ω sont la plus petite et la plus grande valeur de l'angle φ qui appartiennent à la base du cône, son volume entier sera représenté par

$$\frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_\omega} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi.\cos.\psi.r^3.$$

Les valeurs de ces intégrales doubles s'obtiendront évidemment de la manière qui a été expliquée à la fin du numéro précédent.

337. Si le pôle était placé dans l'intérieur du corps, et qu'on voulût exprimer la valeur du volume entier de ce corps, on y parviendrait en prenant $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ pour les limites des valeurs de l'angle ψ, et 0 et 2π pour celles de l'angle φ. Ainsi ce volume est représenté par l'expression

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi.\cos.\psi.r^3.$$

338. Pour donner une application de ces formules générales, soit un ellipsoïde rapporté à ses diamètres rectangulaires, dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \text{ou} \qquad z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

a, b, c désignant les trois demi-diamètres qui coïncident avec les axes des x, des y et des z. La section de la surface du corps par le plan des xy a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{ou} \qquad y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

et cette valeur forme la limite du corps dans le sens des y. Les limites du corps dans le sens des x sont données par les abscisses $x=-a$ et $x=a$. Donc le volume de la moitié de l'ellipsoïde située au-dessus du plan des xy est exprimé par l'intégrale double

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy . c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

ou si l'on veut,

$$\frac{c}{b}\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}}^{\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}} dy \sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}-y^2}.$$

Or, on a en premier lieu,

$$\int_{-\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}}^{\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}} dy \sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}-y^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2},$$

puisque le premier membre représente évidemment l'aire d'un cercle dont le rayon est $\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}$. Il reste donc à prendre l'intégrale

$$\frac{c}{b}\int_{-a}^{a} dx . \frac{\pi}{2}\,\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{\pi bc}{2a^2}\int_{-a}^{a} dx(a^2-x^2),$$

dont la valeur est $\frac{2\pi abc}{3}$; ce qui donne $\frac{4\pi abc}{3}$ pour le volume entier de l'ellipsoïde.

339. Cette formule donne, conformément aux résultats démontrés par la géométrie, $\frac{4\pi a^3}{3}$ pour le volume de la sphère dont a désigne le rayon. On obtient le même résultat d'une manière très-simple par la formule du numéro 337. En effet, l'équation de la surface de la sphère étant $r=a$, cette formule devient ici

$$\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi.\cos.\psi.$$

Mais $\int d\psi.\cos.\psi=\sin.\psi$, et par conséquent $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi.\cos.\psi=2$.

Il reste à prendre l'intégrale $\frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi$, dont la valeur est $\frac{4\pi a^3}{3}$.

7° Aires des surfaces d'une figure quelconque.

340. L'évaluation générale de l'aire d'une surface, dont nous supposons les points rapportés à des axes rectangulaires, dépend de considérations analogues à celles qui ont été présentées dans le numéro 335. Toute question de ce genre, qui pourrait être proposée, se ramènera toujours à déterminer la valeur de la partie de l'aire d'une surface dont l'équation est

$$z=f(x,y),$$

qui est comprise dans un contour dont la projection sur

le plan des xy est une ligne quelconque donnée Mm_1Nm_2 (*fig*. 52). Conservons les dénominations du n° 335, et désignons par v la valeur de la partie de l'aire dont il s'agit, qui se projette sur le plan des xy en Mm_1Nm_2, et qui est une fonction déterminée de l'abscisse $0p$ ou x. L'intervalle pq représentant dx, la partie de l'aire de la surface proposée qui se projette sur le plan des xy en $m_1n_1n_2m_2$ représentera dv. On aura

$$\int_{x_0}^{x} dv,$$

pour l'expression de v, et

$$\int_{x_0}^{x_n} dv,$$

pour l'expression de la totalité de l'aire demandée, qui se projette en Mm_1Nm_2. Mais l'aire projetée en $m_1n_1n_2m_2$ est la somme d'un nombre infini d'éléments différentiels, tels que celui qui se projette sur le rectangle $m\nu n\mu$, dont le côté $m\nu$ est égal à dx, et le côté $m\mu$ est égal à dy. On aura d'ailleurs l'expression de l'élément différentiel dont il s'agit en remarquant d'une part, que la surface proposée doit être regardée comme coïncidant dans l'étendue correspondante à cet élément avec son plan tangent mené au point dont m est la projection ; et d'autre part, que l'aire d'une figure quelconque tracée sur un premier plan, est égale à l'aire de la projection de cette même figure sur un second plan divisée par le cosinus de l'angle compris entre les deux plans. Or, le cosinus de l'angle que le plan tangent à la surface proposée forme avec le plan des xy étant, d'après le n° 217,

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}, \text{ on a évidemment}$$

$$dxdy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1},$$

pour l'expression de l'élément différentiel de l'aire de la surface qui se projette sur le rectangle $mvn\mu$. Il en résulte qu'en omettant une quantité infiniment du second ordre, on aura

$$dv = dx\int_{y_1}^{y_2} dx\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1},$$

y_1 et y_2 représentant les ordonnées m_1p et m_2p qui sont données en fonction de x ; et par conséquent,

$$v = \int_{x_0}^{x} dx\int_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1},$$

pour l'expression de la portion de l'aire demandée qui se projette en Mm_1m_2, puis

$$\int_{x_0}^{x_\infty} dx\int_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1},$$

pour l'expression de la totalité de cette aire.

341. Nous appliquerons cette formule générale à la recherche de l'aire de la surface sphérique, dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad \text{ou} \qquad z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

l'origine des coordonnées étant placée au centre, et a représentant le rayon. Cette équation donnant

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \qquad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

et la limite de la surface dans le sens des y étant représentée par l'équation

$$x^2+y^2=a^2, \qquad \text{ou} \qquad y=\sqrt{a^2-x^2},$$

qui appartient à l'intersection de cette surface et du plan des xy; la formule du numéro précédent donnera

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}+1},$$

ou

$$a\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

pour l'aire de la moitié de la surface, qui est située au-dessus du plan des xy. Mais on a

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\text{C}+\text{arc sin.}\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

et, en prenant l'intégrale entre les limites indiquées,

$$\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\pi.$$

Il reste donc à prendre l'intégrale

$$\pi a\int_{-a}^{a} dx,$$

dont la valeur est $2\pi a^2$; ce qui donne $4\pi a^2$ pour la valeur de l'aire entière de la surface sphérique.

FIN.

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS D'ANALYSE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

XXX. Intégrales définies. — différentiation et intégration sous le signe $\int$.

342. Soit une intégrale définie telle que

$$\int_a^b f(\alpha).\,d\alpha,$$

α étant la variable, $f(\alpha)$ une fonction quelconque de α, a et b deux constantes. Cette formule est regardée, conformément à ce que l'on a vu dans l'article XXVIII, comme présentant une valeur constante déterminée : on s'en forme une idée très-nette, en concevant qu'elle exprime l'aire de la courbe dont α serait l'abscisse, et $f(\alpha)$ l'ordonnée, cette aire étant comprise entre l'axe des abscisses, la courbe, et les ordonnées correspon-

dantes aux abscisses $\alpha=a$ et $\alpha=b$. On pourra toujours obtenir d'une manière exacte ou approchée la valeur de la formule dont il s'agit, à l'exception des cas où l'ordonnée $f(\alpha)$ deviendrait infinie pour une ou plusieurs valeurs de α comprises entre les limites a et b : ces cas exigent le plus souvent un examen spécial.

343. Nous remarquerons maintenant qu'une intégrale définie peut être considérée sous un point de vue plus étendu, en admettant que la fonction désignée par $f(\alpha)$ contienne une quantité variable x. L'expression précédente devient alors une fonction variable de x, dont la valeur dépend de la forme de la fonction $f(\alpha)$, et des limites a, b. En effet, lorsque l'intégration définie indiquée par rapport à α est effectuée, cette quantité α a disparu, et il ne reste plus qu'une fonction contenant la seule variable x.

La variable x pourrait être aussi contenue dans l'expression des limites désignées par a et b. Ainsi l'expression générale d'une intégrale définie représentant une fonction de x est

$$X=\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . f(x,\alpha).$$

344. Proposons-nous de différentier cette nouvelle espèce de fonction, c'est-à-dire de connaître l'accroissement dX correspondant à l'accroissement infiniment petit dx de la variable. En supposant d'abord que les limites de l'intégrale définie soient les constantes a et b, on aura

$$X+dX=\int_a^b d\alpha \left[f(x,\alpha)+\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx\right];$$

et

$$\frac{dX}{dx} = \int_a^b d\alpha . \frac{d.f(x,\alpha)}{dx}.$$

Si nous admettons maintenant que les limites soient φx et ψx, nous aurons

$$X+dX = \int_{\varphi x + \frac{d.\varphi x}{dx}dx}^{\psi x + \frac{d.\psi x}{dx}dx} d\alpha \left[f(x,\alpha) + \frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx\right],$$

c'est-à-dire

$$X = \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha \left[f(x.\alpha) + \frac{d.f(x,\alpha)}{dx}\right] - \left[f(x,\varphi x) + \frac{d.f(x,\varphi x)}{dx}dx\right] . \frac{d.\varphi x}{dx}dx$$
$$+ \left[f(x,\psi x) + \frac{d.f(x,\psi x)}{dx}dx\right] . \frac{d.\psi x}{dx}dx;$$

d'où, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre,

$$dX = \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . \frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx - f(x,\varphi x) . \frac{d.\varphi x}{dx}dx + f(x,\psi x) \frac{d.\psi x}{dx}dx;$$

et par conséquent

$$\frac{dX}{dx} = \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . \frac{d.f(x,\alpha)}{dx} - f(x,\varphi x) . \frac{d.\varphi x}{dx} + f(x,\psi x) . \frac{d.\psi x}{dx}.$$

345. Le résultat précédent devient très-sensible lorsqu'on se représente l'intégrale définie

$$X = \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . f(x,\alpha),$$

comme exprimant l'aire PMNQ (*fig.* 54) de la courbe

MN dont l'ordonnée est $f(x,\alpha)$, cette aire étant prise entre les abscisses $OP=\varphi(x)$ et $OQ=\psi(x)$. 1° Par la seule variation de x dans $f(x,\alpha)$, la courbe se transporte en mn, et l'aire augmente de l'espace MmnN représenté par $\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha.\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx$. 2° Par la seule variation de x dans la limite inférieure $\varphi(x)$, l'aire diminue de l'espace PMP' représenté par $f(x,\varphi x).\frac{d.\varphi x}{dx}dx$. 3° Enfin par la seule variation de x dans la limite supérieure $\psi(x)$, l'aire augmente de l'espace QNQ' représenté par $f(x,\psi x).\frac{d.\psi x}{dx}dx$. La variation simultanée de x dans les trois fonctions $f(x,\alpha)$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ change d'ailleurs l'aire PMNQ en P'M'N'Q'. La variation totale de cette aire est donc exprimée par les trois termes de la formule précédente, lorsqu'on néglige les espaces MmM' et NnN' qui sont infiniment petits du second ordre.

346. On voit par ce qui précède, qu'ayant l'égalité

$$X=\int_a^b d\alpha.f(x,\alpha),$$

les limites a, b étant supposées constantes, on obtient le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction X en remplaçant sous le signe $\int$ la fonction $f(x,\alpha)$ par le coefficient différentiel du premier ordre de cette fonction pris par rapport à x. Il est facile d'en conclure que si l'on multiplie les deux membres de cette même égalité par dx, et si l'on intègre de part et d'autre, on aura

$$\int X.dx = \int_a^b d\alpha . \int dx . f(x,\alpha).$$

Ces différentiations et intégrations sous le signe d'intégrale définie donnent le moyen de déterminer les valeurs de certaines intégrales, en partant des valeurs d'autres intégrales déjà connues.

Détermination de quelques intégrales définies.

347. La détermination des valeurs des intégrales définies, et l'étude des relations qui existent entre ces valeurs, ont beaucoup occupé les géomètres; mais nous ne pouvons présenter sur ce sujet que quelques aperçus.

Lorsque l'intégration indéfinie de la fonction qui se trouve sous le signe $\int$ peut être effectuée, la valeur de l'intégrale définie proposée s'en déduit immédiatement. Il suffira de citer quelques exemples très-simples d'intégrales obtenues de cette manière.

348. Puisque l'on a

$$\int dx . x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

on en conclut, en supposant l'exposant m positif et plus grand que l'unité,

$$\int_0^1 dx . x^m = \frac{1}{m+1} \quad \text{et} \quad \int^1 \frac{dx}{x^m} = \infty .$$

349. Les équations

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc.tang.}\,\frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc.sin.}\,\frac{x}{a},$$

$$\int dx.e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a},$$

donnent

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a},$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty dx.e^{ax} = \infty,\ \int_0^\infty dx.e^{-ax} = \frac{1}{a}.$$

Comme l'on a, en intégrant par parties,

$$\int dx.x^{a-1}.e^{-x} = -x^{a-1}.e^{-x} + (a-1)\int dx.x^{a-2}.e^{-x},$$

on trouve, lorsque a est un nombre entier positif,

$$\int_0^\infty dx.x^{a-1}.e^{-x} = 1.2.3.4.........(a-1).$$

350. Les équations

$$\int dx.\sin.\,ax = -\frac{\cos.\,ax}{a}, \qquad \int dx.\cos.\,ax = \frac{\sin.\,ax}{a},$$

donnent

$$\int_0^\pi dx.\sin.ax = \frac{1-\cos.a\pi}{a}, \qquad \int_0^\pi dx.\cos.ax = \frac{\sin.a\pi}{a}.$$

Ainsi la valeur de la première intégrale est $\frac{2}{a}$ lorsque a

est un nombre entier impair, et zéro lorsque a est un nombre entier pair. La seconde intégrale est toujours égale à zéro lorsque a est un nombre entier.

351. Les équations

$$\int dx.x\sin.ax = -\frac{x\cos.ax}{a} + \frac{\sin.ax}{a^2},$$

$$\int dx.x\cos.ax = \frac{x\sin.ax}{a} + \frac{\cos.ax}{a^2},$$

donnent

$$\int_0^\pi dx.x\sin.ax = -\frac{\pi\cos.a\pi}{a},$$

$$\int_0^\pi dx.x\cos.ax = \frac{\cos.a\pi - 1}{a^2}.$$

Par conséquent, suivant que a est entier impair ou entier pair, la première intégrale est $+\frac{\pi}{a}$ ou $-\frac{\pi}{a}$; et la seconde intégrale est $-\frac{a^2}{2}$ ou 0.

352. Des équations

$$\int dx.\sin.^2x = -\frac{\sin.x.\cos.x}{2} + \frac{1}{2}x,$$

$$\int dx.\cos.^2x = \frac{\sin.x.\cos.x}{2} + \frac{1}{2}x,$$

on déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^2x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\cos.^2x = \frac{\pi}{4};$$

et en général, les formules de réduction données n° 294,

$$\int dx.\sin.^m x = -\frac{\sin.^{m-1}x.\cos.x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx.\sin.^{m-2}x,$$

$$\int dx.\cos.^m x = \frac{\sin.x.\cos.^{m-1}x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx.\cos.^{m-2}x,$$

conduisent aux résultats suivants : 1° lorsque m est un nombre entier pair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^m x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\cos.^m x = \frac{1.3.5.......(m-1)}{2.4.6.......\ m}\frac{\pi}{2};$$

2° lorsque m est un nombre entier impair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^m x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\cos.^m x = \frac{2.4.6.......(m-1)}{3.5.7.......\ m}.$$

On peut remarquer que les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^m x, \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\cos.^m x,$$

tendent l'une et l'autre vers zéro à mesure que le nombre m augmente, que ce nombre soit pair ou impair. Donc le rapport de ces valeurs a pour limite l'unité; d'où l'on conclut

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8......}{1.3.3.5.5.7.7.9......}.$$

Cette expression très-remarquable du nombre π a été donnée par Wallis.

353. Les équations

$$\int dx.e^{-ax}.\sin.bx = e^{-ax}.\frac{-a\sin.bx - b\cos.bx}{a^2+b^2},$$

$$\int dx.e^{-ax}.\cos.bx = e^{-ax}.\frac{b\sin.bx - a\cos.bx}{a^2+b^2},$$

qui se déduisent du n° 292, donnent

$$\int_0^\infty dx.e^{-ax}.\sin.bx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty dx.e^{-ax}.\cos.bx = \frac{a^2+b^2}{a};$$

et l'on peut remarquer qu'à mesure que la quantité désignée par x approche de devenir égalé à zéro, ces expressions approchent de plus en plus des limites $\frac{1}{b}$ et zéro. Néanmoins les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty dx.\sin.bx, \qquad \text{et} \quad \int_0^\infty dx.\cos.ax$$

sont nécessairement indéterminées.

354. Il serait superflu de multiplier ces exemples, puisque dans des cas semblables la recherche dont il s'agit n'offre pas de difficultés. Mais les géomètres ont déterminé, dans les cas même où la fonction sous le signe $\int$ ne peut être intégrée, les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies. Les méthodes employées pour cette détermination consistent principalement : 1° à déduire les valeurs des intégrales cherchées d'autres intégrales déjà connues, au moyen de la différentiation ou de l'intégration sous le signe $\int$; 2° à trouver entre la fonction que représente l'intégrale proposée et ses différentielles des relations qui en font connaître la nature ; 3° à passer des expressions réelles aux expressions imaginaires. La considération des intégrales doubles a également fait connaître plusieurs résultats importants. Nous présenterons quelques exemples propres à donner une idée des méthodes dont il s'agit.

355. Si dans l'équation donnée n° 348,

$$\int_0^1 dx.x^{m-1} = \frac{1}{m},$$

où nous supposerons m plus grand que l'unité, on multiplie les deux membres par dm, et que l'on intègre à partir de $m=n$, conformément à ce qu'on a vu n° 346, on trouvera

$$\int_0^1 dx\,\frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{lx}=l\frac{m}{n}.$$

356. Reprenons les équations du n° 353,

$$\int_0^\infty dx.e^{-ax}\sin.bx=\frac{b}{a^2+b^2},\quad \int_0^\infty dx.e^{-ax}\cos.bx=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

Multipliant par da, et intégrant par rapport à a depuis $a=c$, il viendra

$$\int_0^\infty dx.\frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\sin.\,bx=\text{arc. tang.}\,\frac{a}{b}-\text{arc. tang.}\,\frac{c}{b}=\text{arc. tang.}\,\frac{b(a-c)}{b^2+ac}$$

$$\int_0^\infty dx.\frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos.\,bx=\frac{1}{2}\,l\,\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}.$$

357. Si l'on fait $c=0$ et $a=\infty$, ces dernières équations donnent

$$\int_0^\infty dx\frac{\sin.bx}{x}=\frac{\pi}{2},\qquad\text{et}\qquad\int_0^\infty dx\frac{\cos.bx}{x}=\infty.$$

Il est remarquable que l'intégrale $\int_0^\infty dx\,\frac{\sin.bx}{x}$ soit indépendante du nombre b. En effet, supposant $x=\frac{z}{b}$, cette intégrale se change en $\int_0^\infty dx\,\frac{\sin.z}{z}$, où b a disparu.

358. Soit l'intégrale

$$\int_0^\infty dx.e^{-x^2}.$$

En la multipliant par une autre intégrale pareille dans laquelle nous écrirons y au lieu de x, nous aurons

$$\int_0^\infty dy.e^{-y^2}.\int_0^\infty dx.e^{-x^2}=\int_0^\infty dy\int_0^\infty dx.e^{-(y^2+x^2)}.$$

Posons maintenant $y=xt$, t étant une nouvelle variable. Quelle que soit x entre les limites 0 et ∞, aux valeurs 0 et ∞ de y correspondront également des valeurs de 0 et ∞ de t; et l'on aura d'ailleurs $dy=xdt$. L'expression précédente se changera donc en

$$\int_0^\infty dt\int_0^\infty dx.x.e^{-(1+t^2)x^2}.$$

Effectuant d'abord l'intégration par rapport à x, elle deviendra

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+t^2}{dt};$$

et comme $\int\frac{dt}{1+t^2}=$ arc.tang. t, et par conséquent $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$, nous aurons définitivement $\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$ pour la valeur du quarré de l'intégrale $\int_0^\infty dx.e^{-x^2}$. Donc

$$\int_0^\infty dx.e^{-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

expression très-remarquable, et fréquemment employée dans plusieurs applications de l'analyse.

359. Considérons maintenant l'intégrale

$$\mathrm{U}=\int_0^\infty dx.\cos.rx.e^{-a^2x^2}.$$

Différentiant par rapport à r, on trouve

$$\frac{dU}{dr} = -\int_0^\infty dx.x\sin.rx.e^{-a^2x^2}.$$

Mais nous avons en intégrant par parties,

$$\int dx.x\sin.rx.e^{-a^2x^2} = -\frac{1}{2a^2}\sin.rx.e^{-a^2x^2} + \frac{r}{2a^2}\int dx.\cos.rx.e^{-a^2x^2},$$

d'où l'on déduit, puisque le terme hors du signe est nul aux deux limites 0 et ∞,

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{r}{2a^2}U.$$

Cette équation fait connaître la nature de la fonction U, qui est nécessairement

$$U = A.e^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

A désignant une constante. Ainsi nous avons

$$\int_0^\infty dx.\cos.rx.e^{-a^2x^2} = A.e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

Pour déterminer la constante A, on supposera $r=0$, ce qui donnera

$$\int_0^\infty dx.e^{-a^2x^2} = A.$$

Or de l'équation $\int_0^\infty dt.e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, obtenue n° 359, on déduit en faisant $t=ax$, $\int_0^\infty dx.e^{-a^2x^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{\pi} = A$. L'expression de l'intégrale proposée est donc définitivement

$$\int_0^\infty dx.\cos.rx.e^{-a^2x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}.e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

360. Soit encore l'intégrale

$$\int_0^\infty dx\frac{\cos.ax}{1+x^2},$$

et prenons d'abord pour la limite supérieure $\frac{2k\pi}{a}$, k désignant un nombre entier. En écrivant donc

$$\mathrm{U}=\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx\frac{\cos.ax}{1+x^2},$$

et différentiant deux fois de suite par rapport à a, conformément à la règle donnée n° 344, il viendra

$$\frac{d\mathrm{U}}{da}=-\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx\frac{x\sin.ax}{1+x^2}+\frac{2k\pi}{a^2+4k^2\pi^2},$$

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{da^2}=-\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx\frac{x^2\cos.ax}{1+x^2}+\frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2};$$

d'où l'on conclut

$$\mathrm{U}-\frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2}=\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx\cos.ax-\frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2},$$

ou simplement (puisque l'intégrale du second membre a une valeur nulle),

$$\mathrm{U}-\frac{d^2\mathrm{U}}{da^2}=-\frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2}.$$

Admettons maintenant que k soit un nombre infiniment

grand; le second membre de cette équation deviendra infiniment petit. Par conséquent si U représente l'intégrale proposée, nous aurons

$$U=\frac{d^2U}{da^2}.$$

Cette équation détermine la nature de la fonction U, dont l'expression la plus générale est

$$Ae^{-a}+Be^{a},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. Mais il est visible que l'on doit faire B=0, puisque la valeur de l'intégrale proposée ne peut croître indéfiniment avec le nombre a. On a donc simplement

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\cos.ax}{1+x^2}=A.e^{-a}.$$

Pour déterminer la constante A, on supposera $a=0$, et comme $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}=A$, il vient définitivement

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\cos.ax}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

361. Si l'on remplace dans cette équation x par $\frac{x}{m}$, et a par ma, elle se change en

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\cos.ax}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}e^{-ma};$$

et en différentiant par rapport à a, on a le résultat non moins remarquable

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x\sin.ax}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-ma}.$$

362. Pour donner un exemple de l'usage des imaginaires, nous prendrons l'intégrale

$$\int_{-}^{\infty} dx.\cos.2rx.e^{-x^2}.$$

En remplaçant cos. $2rx$ par sa valeur en exponentielles imaginaires, elle deviendra

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-x^2+2rx\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-x^2-2rx\sqrt{-1}},$$

ou en multipliant et divisant par e^{-r^2}, afin de rendre les exposants de e sous le signe $\int$ des quarrés parfaits,

$$\frac{1}{2}e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-(x-r\sqrt{-1})^2}+\frac{1}{2}e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-(x+r\sqrt{-1})^2}.$$

Mais on a, comme on l'a vu n° 358,

$\int_{0}^{\infty} dx.e^{-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, et par conséquent $\int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$;

d'où l'on conclut

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-(x+b)^2}=\sqrt{\pi},$$

quelle que soit la constante b. Donc si l'on fait $b=\pm r\sqrt{-1}$; l'expression précédente de l'intégrale proposée deviendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx.\cos.2rx.e^{-x^2}=\sqrt{\pi}.e^{-r^2},$$

et l'on aura par conséquent

$$\int_0^\infty dx.\cos.2rx.e^{-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.e^{-r^2}.$$

Ce résultat s'accorde avec celui qui a été obtenu n° 359.

XXXI. Conditions d'intégrabilité pour les fonctions différentielles du premier ordre a plusieurs variables indépendantes. — Intégration de ces fonctions lorsqu'elles satisfont aux conditions d'intégrabilité.

363. Considérons une fonction différentielle d'une seule variable telle que Xdx, X désignant une fonction contenant la variable x et des quantités constantes. La fonction Xdx pourra toujours être regardée comme la différentielle exacte d'une certaine fonction de x. En effet, ou Xdx sera la différentielle d'une fonction connue de x, et dans ce cas l'intégration s'effectuerait immédiatement, ou du moins l'on pourra effectuer cette intégration en développant la fonction X en série ordonnée suivant les puissances entières de la variable x, et prenant l'intégrale de chaque terme.

364. Soit maintenant une fonction différentielle du premier ordre de deux variables x, y, telle que $Pdx+Qdy$, où P, Q désignent des fonctions quelconques de x et y. Une telle fonction ne peut pas être regardée en général comme étant la différentielle exacte d'une fonction de x, y : cela n'a lieu qu'autant qu'il existe une certaine relation entre les quantités P et Q. En effet, soit U une fonction quelconque de x, y, la différentielle complète de U, c'est-à-dire l'accroissement de U correspondant

aux accroissements simultanés dx et dy de x et y, sera comme on l'a vu dans l'article IV,

$$dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy,$$

où $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$ représentent respectivement les coefficients différentiels de la fonction U pris en regardant x seule comme variable, et y seule comme variable. Il faut donc, pour que la fonction proposée $Pdx+Qdy$ résulte de la différenciation d'une fonction quelconque U, que l'on puisse écrire

$$P = \frac{dU}{dx}, \qquad Q = \frac{dU}{dy}.$$

Mais on a, comme on l'a vu nº 69, $\frac{d^2U}{dxdy} = \frac{d^2U}{dydx}$; donc on devrait avoir également

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

équation qui exprime la relation qui doit subsister entre les fonctions P,Q pour que $Pdx+Qdy$ soit la différentielle d'une fonction quelconque de x,y.

365. Si la fonction proposée est $Pdx+Qdy+Rdz$, où P,Q,R désignent des fonctions quelconques de x,y,z, on remarquera que U étant une fonction quelconque de x,y,z, on a

$$dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz.$$

Mais

$$\frac{d^2U}{dxdy} = \frac{d^2U}{dydx}, \qquad \frac{d^2U}{dxdz} = \frac{d^2U}{dzdx}, \qquad \frac{d^2U}{dydz} = \frac{d^2U}{dzdy}.$$

Donc la fonction proposée ne pourra être la différentielle d'une certaine fonction de x, y, z, à moins que les fonctions P, Q, R ne satisfassent aux conditions

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}, \qquad \frac{dP}{dz}=\frac{dR}{dx}, \qquad \frac{dQ}{dz}=\frac{dR}{dy}.$$

Et ainsi de suite s'il y avait un plus grand nombre de variables.

366. Lorsque les fonctions différentielles proposées satisfont aux conditions d'intégrabilité, on peut en obtenir l'intégrale de la manière suivante. Soit

$$dU=Pdx+Qdy\,;$$

l'intégrale U doit nécessairement être de la forme

$$U=\int Pdx+Y,$$

en désignant par Y une fonction de la variable y seule. Or, cette dernière équation donnerait :

$$\frac{dU}{dy}=\int\frac{dP}{dy}dx+\frac{dY}{dy},$$

quantité qui doit être égale à Q. Ainsi

$$\frac{dY}{dy}=Q-\int\frac{dP}{dy}dx,$$

et

$$Y=const.+\int dy\left(Q-\int dx\,\frac{dP}{dy}\right).$$

L'intégrale cherchée est donc

$$U=const.+\int dx.P+\int dy\left(Q-\int dx\,\frac{dP}{dy}\right).$$

367. On vérifie que ce procédé d'intégration suppose l'existence de la condition indiquée n° 364. En effet, pour que la quantité $Q-\int dx\,\frac{dP}{dy}$ soit une fonction de y seule, il faut que la différentielle de cette fonction prise par rapport à x soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}=0.$$

368. Soit pour exemple la fonction différentielle

$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}.$$

Comme nous avons

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-y.2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{x^2+y^2-x.2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

la fonction proposée satisfait aux conditions d'intégrabilité. En suivant la méthode précédente, nous écrirons donc

$$U=\int\frac{ydx}{x^2+y^2}+Y=\text{arc. tang.}\frac{x}{y}+Y,$$

et

$$\frac{dU}{dy}=-\frac{x}{y^2+x^2}+\frac{dY}{dy}.$$

Mais en comparant avec la fonction proposée, on voit que $\frac{dY}{dy}$ doit être nulle. L'intégrale cherchée est donc simplement

$$U=const.+\text{arc tang.}\frac{x}{y}.$$

369. Soit encore proposée la différentielle

$$dU=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right).$$

Elle satisfait aux conditions d'intégrabilité, car l'on trouve

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Nous écrirons donc

$$U=\int dx.\frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)x}+Y,$$

qui se met facilement sous la forme

$$U=\int dx\left(\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{1}{x}\right)+Y,$$

et donne

$$U=\text{arc tang.}\frac{x}{y}+lx+Y.$$

On en déduit

$$\frac{dU}{dy}=-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{dY}{dy};$$

et en comparant avec la différentielle proposée,

$$-\frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)y}=-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{dY}{dy};$$

d'où

$$\frac{dY}{dy}=-\frac{1}{y},\quad \text{et par conséquent}\quad Y=const.-ly.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$U=\text{arc tang.}\frac{x}{y}+l\frac{x}{y}+const.$$

370. Les mêmes considérations s'appliquent aux différentielles contenant trois ou un plus grand nombre de variables. Soit

$$dU=Pdx+Qdy+Rdz,$$

une différentielle proposée satisfaisant aux conditions d'intégrabilité indiquées n° 365. L'intégrale U doit nécessairement être de la forme

$$U=\int Pdx+Y,$$

Y désignant ici une fonction des variables y et z seules. Cette équation donne comme ci-dessus,

$$\frac{dU}{dy}=\int\frac{dP}{dy}dx+\frac{dY}{dy},$$

quantité qui doit être égale à Q. Donc

$$\frac{dY}{dy}=Q-\int\frac{dP}{dy}dx,\qquad \text{et}\qquad Y=\int dy\left(Q-\int dx\frac{dP}{dy}\right)+Z,$$

Z désignant une fonction de la variable z seule. Ainsi l'on a

$$U=\int Pdx+\int dy\left(Q-\int dx\frac{dP}{dy}\right)+Z,$$

et par conséquent

$$\frac{dU}{dz}=\int dx\frac{dP}{dz}+\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right)+\frac{dZ}{dz}.$$

Cette dernière quantité devant être égale à R, la fonction Z est déterminée par l'équation

$$\frac{dZ}{dz}=R-\int dx\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right),$$

ce qui donne

$$Z=const.+\int dz\left[R-\int dx\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right)\right].$$

Ainsi l'intégrale cherchée est

$$U=const.+\int dx.P+\int dy\left(Q-\int dx\frac{dP}{dy}\right)+$$
$$+\int dz\left[R-\int dx\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right)\right].$$

371. On vérifie encore ici que ce procédé d'intégration suppose l'existence des conditions d'intégrabilité indiquées n° 365. En effet, pour que la quantité

$$R-\int dx.\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right)$$

soit une fonction de z seule, il faut que les différentielles de cette fonction prises par rapport à x et par rapport à y soient nulles, conditions qui donnent

$$\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{d^2Q}{dzdx}-\frac{d^2P}{dydz}\right)=0,$$
$$\frac{dR}{dy}-\int dx.\frac{d^2P}{dzdy}-\frac{dQ}{dz}+\int dx\frac{d^2P}{dydz}=0.$$

Ces équations subsisteront si l'on a, comme dans le n° cité,

$$\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}=0,\quad \frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}=0,\quad \frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}=0.$$

372. Soit pour exemple la différentielle

$$dU=-\frac{2x(y^2-z^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy-\frac{2z}{x^2+z^2}dz.$$

Elle satisfait aux conditions d'intégrabilité : car on trouve

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{dP}{dz}=\frac{dR}{dx}=\frac{4xz}{(x^2+z^2)^2},\ \frac{dQ}{dz}=\frac{dR}{dy}=0.$$

Nous écrirons donc

$$U=-\int dx\ \frac{2x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)\ (x^2+z^2)}+Y,$$

qui revient à

$$U=\int dx\left(\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+z^2}\right)+Y,$$

c'est-à-dire

$$U=l(x^2+y^2)-l(x^2+z^2)+Y.$$

Cette expression donne

$$\frac{dU}{dy}=\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{dY}{dy},$$

et en comparant avec la fonction proposée, on voit que $\frac{dY}{dy}$ doit être nulle. Donc Y ne peut contenir que la variable z. On aurait alors

$$\frac{dU}{dz}=-\frac{2z}{x^2+z^2}+\frac{dY}{dz},$$

et en comparant encore avec la fonction proposée, on voit que $\frac{dY}{d\,z}$ doit être nulle. L'intégrale cherchée est donc simplement

$$U=l\,\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}+const.$$

373. Soit encore pour exemple la différentielle

$$dU=-\frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{dx}{x}+\frac{x^2+(y-z)^2}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{dy}{z}+\frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{dz}{z}-\frac{ydz}{z^2}+\frac{dz}{z^2}.$$

Elle satisfait aux conditions d'intégrabilité, car on trouve

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=\frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},\qquad \frac{dP}{dz}=\frac{dR}{dx}=\frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{dQ}{dz}=\frac{dR}{dy}=\frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\frac{1}{z^2}.$$

Nous poserons donc, conformément à la méthode précédente,

$$U=-\int dx\,\frac{x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)x}+Y,$$

qui revient à

$$U=\int dx\left(\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)+Y,$$

et donne par conséquent

$$U=lx-l(x^2+y^2+z^2)+Y.$$

On en déduit

$$\frac{dU}{dy}=-\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\frac{dY}{dy},$$

et la comparaison avec la différentielle proposée donne

$$\frac{x^2+(y-z)^2}{(x^2+y^2+z^2)z}=-\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\frac{dY}{dy},$$

d'où

$$\frac{dY}{dy}=\frac{1}{z},\qquad \text{et par conséquent}\qquad Y=\frac{y}{z}+Z.$$

Nous avons donc actuellement

$$U=lx-l(x^2+y^2+z^2)+\frac{y}{z}+Z.$$

Donc

$$\frac{dU}{dz}=-\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}-\frac{y}{z^2}+\frac{dZ}{dz};$$

et en comparant avec la différentielle proposée,

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}=-\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}-\frac{y}{z^2}+\frac{dZ}{dz},$$

d'où

$$\frac{dZ}{dz}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}, \quad \text{et par conséquent} \quad Z=lz-\frac{1}{2z^2}+const.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$U=l\frac{xz}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+const.$$

374. Il est superflu de remarquer que l'on parvient au même résultat quelle que soit la variable par laquelle on commence l'intégration. Si dans l'exemple précédent on veut commencer par la variable z, on écrira

$$U=\int dz\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right)+X,$$

X désignant une fonction de x et y seules. Cette équation revient à

$$U=\int dz\left(-\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right)+X,$$

ou

$$U=-l(x^2+y^2+z^2)+lz+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+X.$$

On en déduit

$$\frac{dU}{dx}=-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\frac{dX}{dx};$$

en comparant avec la fonction proposée l'on a

$$-\frac{x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)x}=-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\frac{dX}{dx},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dX}{dx}=\frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad X=lx+Y,$$

Y désignant une fonction de y seule. Nous avons donc maintenant

$$U=-l(x^2+y^2+z^2)+lz+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+lx+Y;$$

d'où

$$\frac{dU}{dy}=-\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{z}+\frac{dY}{dy},$$

et en comparant avec la fonction proposée, on voit que $\frac{dY}{dy}$ doit être nulle, ou que la fonction Y se réduit à une constante. La valeur complète de U est donc comme ci-dessus

$$U=l\frac{xz}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+const.$$

375. Lorsque dans l'équation

$$dU=Pdx+Qdy,$$

le second membre est une différentielle exacte, U est une fonction des deux variables indépendantes x,y. Dans la géométrie on regardera cette fonction comme l'ordonnée d'une surface mesurée perpendiculairement au plan, dans lequel seront comptées les deux abscisses x et y. Mais il n'en est plus de même si la fonction différentielle $Pdx+Qdy$, ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité. L'équation dont il s'agit n'a plus alors aucun sens, puisqu'on ne peut plus la concevoir dérivée d'une relation analytique existante entre les trois quantités U,

x, y. On ne peut lui en donner un qu'en établissant une certaine relation entre les variables x et y, qui ne seront plus alors toutes deux indépendantes. Posant donc $y = \varphi(x)$, φ désignant une fonction entièrement arbitraire, l'équation proposée deviendra de la forme

$$dU = Mdx,$$

M étant une fonction de x seule, contiendra la fonction arbitraire $\varphi(x)$ et son coefficient différentiel du premier ordre. L'équation $dU = Mdx$ peut toujours être intégrée. La fonction U qui sera donnée par l'intégration, représentera l'ordonnée d'une courbe dont la projection sur le plan des x, y a pour équation $y = \varphi(x)$; et il est évident qu'à raison de l'indétermination de la fonction φ, il existe une infinité de courbes différentes auxquelles l'ordonnée U peut appartenir.

Ces notions s'étendront facilement aux cas où la fonction différentielle proposée contient un plus grand nombre de variables.

XXXII. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE A DEUX VARIABLES.

376. On comprend en général sous cette dénomination toute équation de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

dans laquelle x est regardée comme la variable indépendante ; y comme une fonction variable dont la valeur dépend de celle de x ; et $\frac{dy}{dx}$ est le coefficient différentiel

du premier ordre de y, pris par rapport à x, c'est-à-dire le rapport des accroissements simultanés des deux variables x et y. Il s'agit de se former une idée de la relation qu'une telle équation établit entre ces deux variables.

Pour y parvenir, on remarque que l'équation proposée peut toujours être censée résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, en sorte que l'on en ait tiré

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y),$$

la fonction φ désignant une fonction qui peut en général présenter une ou plusieurs valeurs distinctes. Admettons en premier lieu, qu'elle ne présente qu'une seule valeur, et pour fixer les idées, considérant x comme une abscisse et y comme l'ordonnée correspondante, en sorte que l'équation proposée doive représenter la figure d'une courbe plane. Si l'on attribue arbitrairement à x et y, deux valeurs quelconques a et b, l'équation précédente donnera pour $\frac{dy}{dx}$ une valeur déterminée, au moyen de laquelle on pourrait connaître quelle serait la variation fort petite de y à partir de la valeur b, si x venait à augmenter ou à diminuer d'une quantité très-petite à partir de la valeur a. En effet, Δx représentant un très-petit accroissement de x, on a sensiblement $\Delta y=\frac{dy}{dx}\Delta x$. Attribuant ensuite à x et y dans l'équation précédente les valeurs $a+\Delta x$ et $b+\frac{dy}{dx}\Delta x$, cette équation donnera une nouvelle valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui pourra être

employée de la même manière. Il est évident qu'en opérant ainsi, on peut obtenir une courbe qui s'approchera indéfiniment de la courbe proposée à mesure que l'on attribuera des valeurs de plus en plus petites aux accroissements Δx. L'équation proposée doit donc être regardée comme déterminant la figure d'une certaine courbe dont on peut prendre arbitrairement un point quelconque.

Suivant la position arbitraire que l'on attribuera au premier point des courbes qui seraient construites par le moyen de l'équation précédente, non-seulement la position, mais en général la figure de ces courbes seront différentes. Néanmoins elles auront toutes un caractère commun, dont la nature est exprimée par l'équation différentielle proposée. Ainsi, à proprement parler, cette équation différentielle exprime une propriété commune à une infinité de courbes que l'on peut concevoir tracées sur un plan. Cette propriété détermine l'inclinaison de la tangente dans un point quelconque, en fonction des coordonnées de ce point : elle donne le moyen de construire la courbe entière, lorsqu'un point quelconque de cette courbe est déterminé.

On peut remarquer d'ailleurs, que le choix de l'une quelconque des courbes en nombre infini auxquelles appartient l'équation différentielle proposée dépend d'une seule quantité arbitraire. Il suffira de fixer, par exemple, la valeur de x correspondante à celle de $y=0$. En effet, l'on doit toujours retrouver la même courbe, quel que soit celui des points de cette courbe que l'on se soit donné.

377. Admettons en second lieu que l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y),$$

donne plusieurs valeurs différentes pour le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. On peut considérer chacune de ces valeurs à part, et lui appliquer ce qui a été dit dans le n° précédent. On verra dans ce cas que l'équation différentielle proposée appartient à plusieurs systèmes de courbes tracées sur un plan, qui se croisent en différents sens. Cette équation exprime des propriétés communes à toutes les courbes en nombre infini, qui appartiennent respectivement à chacun de ces systèmes, propriétés au moyen desquelles la tangente est déterminée dans un point quelconque des courbes en fonction des coordonnées de ce point ; en sorte que ces courbes pourraient être construites au moyen de l'équation proposée, si un de leurs points était donné.

378. Il est facile de concevoir d'après cela ce que doit être l'*équation primitive* ou l'*intégrale* de l'équation différentielle proposée. Cette équation primitive, si l'on veut qu'elle ait la même généralité que l'équation différentielle, doit convenir à l'une quelconque des courbes qui pourraient être construites au moyen de cette équation. Ainsi, 1° il faut qu'elle contienne une *constante arbitraire*, c'est-à-dire différente des constantes qui peuvent se trouver dans l'équation différentielle proposée, et qui entreraient dans l'expression analytique de la propriété représentée par cette équation. L'indétermination de la constante dont il s'agit donnera au ré-

sultat toute la généralité nécessaire pour qu'il représente le système entier des courbes auxquelles convient l'équation proposée. Il faut que cette équation primitive *satisfasse* à l'équation différentielle proposée, c'est-à-dire que les valeurs de y et $\frac{dy}{dx}$ qui seraient tirées de l'équation primitive et de sa différentielle étant substituées dans l'équation proposée, la rendent identique, ou du moins qu'en éliminant la constante arbitraire entre l'équation primitive et sa différentielle, on retrouve l'équation proposée.

379. Toute équation en termes finis qui satisfait à une équation différentielle proposée, et qui contient une constante arbitraire, est l'*intégrale générale* de cette équation différentielle. Cette intégrale générale donne les *intégrales particulières* quand on y attribue diverses valeurs à la constante arbitraire.

Il existe dans beaucoup de cas des équations primitives qui satisfont à une équation différentielle proposée, mais qui ne contiennent pas de constante arbitraire. Quelquefois ces équations sont des intégrales particulières dans lesquelles la constante arbitraire a disparu, à raison d'une certaine valeur que l'on aurait attribuée à cette constante, comme cela aurait lieu, par exemple, si on l'avait supposée égale à zéro ou infinie. D'autres fois les équations primitives dont il s'agit ont un caractère spécial, et doivent être considérées à part : elles constituent alors ce qu'on a nommé *solutions particulières*. Nous nous occupons seulement dans cet article de la recherche de l'intégrale générale.

380. Soit pour exemple l'équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx}-y+b=0.$$

On en déduit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-b}{x},$$

et il est visible que cette équation appartient à une ligne droite quelconque passant par le point dont les coordonnées sont $x=0, y=b$. L'intégrale générale est

$$y-ax-b=0.$$

En effet, cette équation primitive satisfait à l'équation différentielle, parce que les valeurs $y=ax+b$, $\frac{dy}{dx}=a$, que l'on en déduit, rendent identique cette équation différentielle; de plus elle contient la constante arbitraire a qui n'entre pas dans l'équation proposée. En faisant varier cette constante, les intégrales particulières qu'on obtiendra représenteront toutes les lignes droites diversement inclinées qui se coupent sur l'axe des y, à une distance b de l'origine.

381. Soit encore l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}-a-2x=0, \quad \text{ou} \quad dy-(a+2x)dx=0.$$

dont l'équation primitive est

$$y-ax-x^2+b=0,$$

b étant la constante arbitraire. Cette équation primitive représente une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des y, et placé à une distance $-\frac{a}{2}$ de cet axe. La courbe

coupe l'axe des y à la distance $-b$ de l'origine. Pour avoir toutes les courbes auxquelles appartient l'équation différentielle proposée, il suffira donc de faire varier la constante b dans l'équation primitive, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; ou de transporter la parabole parallèlement aux y, sans changer la position de son axe.

L'équation différentielle $\frac{dy}{dx}-a-2x=0$ conduit à l'équation primitive $y-ax-x^2+b=0$, dans laquelle b est la constante arbitraire. On peut proposer une autre équation différentielle, qui conduirait à la même équation primitive dans laquelle a serait la constante arbitraire. Cette équation différentielle se trouvera immédiatement, en préparant l'équation primitive, de manière que la différenciation fasse disparaître la constante a, c'est-à-dire, en la résolvant par rapport à cette constante, ce qui donne

$$\frac{y-x^2+b}{x}-a=0.$$

Différenciant, et supprimant le facteur commun $\frac{1}{x^2}$, il vient

$$y-x\frac{dy}{dx}+x^2+b=0.$$

On peut aussi trouver la même équation différentielle sans résoudre l'équation primitive par rapport à a, en éliminant cette constante entre l'équation primitive et l'équation $\frac{dy}{dx}-a-2x=0$, qui s'en déduit par la différenciation. L'équation différentielle que nous venons d'obtenir en dernier lieu, et dans laquelle la constante a a

disparu, appartient, aussi bien que l'équation primitive dans laquelle a est regardée comme la constante arbitraire, à toutes les paraboles dont l'axe est parallèle à l'axe des y, et qui coupent cet axe à la distance $-b$ de l'origine des coordonnées.

Au reste si l'équation $y-x\frac{dy}{dx}+x^2+b=0$ était proposée, on ne pourrait pas en déduire immédiatement l'équation primitive dont elle dérive; car le premier membre n'est pas une différentielle exacte d'une fonction des variables x et y. Mais il le devient en restituant le facteur $\frac{1}{x^2}$.

382. Si l'équation différentielle proposée était

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-a^2=0,$$

on en déduirait

$$\frac{dy}{dx}=\pm a.$$

Par conséquent, cette équation appartient aux deux systèmes de lignes droites qui forment avec l'axe des x des angles dont les tangentes trigonométriques sont respectivement a et $-a$. Elle a pour intégrale générale

$$y^2-a^2x^2-2by+b^2=0,$$

résultat de la multiplication des deux équations $y+ax-b=0$, et $y-ax-b=0$, qui appartiennent respectivement, à cause de la constante arbitraire b, à l'une quelconque des lignes droites de l'un ou de l'autre système. En effet, en différenciant l'équation précédente, on a

$$y\frac{dy}{dx}-a^2x-b\frac{dy}{dx}=0\ ;$$

et en éliminant b entre ces deux équations, on retrouvera l'équation proposée.

383. En général, étant donnée une équation primitive contenant les deux variables x,y et plusieurs constantes a,b,c, etc., que nous désignons par

$$\mathrm{F}(x,y,a,b,c,\text{etc.})=0\ ,$$

l'équation qui s'en déduit immédiatement par la différenciation,

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx}+\frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{dy}{dx}=0\ , \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{F}}{dy}dy=0\ ,$$

subsistera en même temps que cette équation primitive. On peut donc combiner d'une manière quelconque les deux équations dont il s'agit. Il est possible que la différenciation ait fait disparaître une des constantes a,b,c, etc.; et c'est ce qui aura lieu si cette constante se trouve seulement dans un terme qui ne contienne ni x, ni y. On peut éliminer une constante quelconque qui se trouverait à la fois dans les deux équations. On peut aussi éliminer une certaine fonction de x,y, qui se trouverait dans quelques termes. Il est possible enfin, que tous les termes de l'équation différentielle se trouvent multipliés par un facteur en x,y qui disparaîtra quand on égalera la somme de ces termes à zéro. On voit ainsi que d'une même équation primitive, on peut en général déduire par diverses opérations plusieurs équations différentielles différentes les unes des autres, et

l'on conçoit la difficulté du problème qui consiste à trouver l'intégrale d'une équation différentielle quelconque proposée.

Equations différentielles du premier ordre où le coefficient différentiel n'entre qu'à la première puissance.

384. Considérons une équation différentielle proposée du premier ordre dans laquelle le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ ne se trouve qu'au premier degré, et qui sera de la forme

$$P+Q\frac{dy}{dx}=0, \qquad \text{ou} \qquad Pdx+Qdy=0,$$

P et Q désignant des fonctions quelconques de x et y.

Il est visible en premier que, si la fonction $Pdx+Qdy$ était une différentielle exacte d'une certaine fonction de x,y, c'est-à-dire, si elle satisfaisait aux conditions d'intégrabilité indiquées n° 364, il suffirait de prendre l'intégrale de cette fonction, conformément aux règles données dans l'article précédent. Cette intégrale, complétée par une constante arbitraire, étant égalée à zéro, serait l'intégrale cherchée. Ce cas particulier ne peut avoir lieu, qu'autant que l'équation différentielle proposée est le résultat immédiat de la différenciation de l'équation primitive mise sous une forme telle, que la constante arbitraire se trouvant dans un terme où x et y n'entraient point, cette constante a pu disparaître par le seul fait de la différenciation.

385. L'équation proposée s'intègre toujours, ou du moins la recherche de l'intégrale est ramenée aux qua-

dratures, lorsque les variables sont *séparées*, c'est-à-dire, lorsque cette équation est mise sous la forme

$$Xdx+Ydy=0,$$

X désignant une fonction quelconque de x seule, et Y une fonction quelconque de y seule. L'intégrale générale est alors

$$\int dx.X+\int dy.Y+A=0,$$

A désignant la constante arbitraire.

Les variables sont évidemment séparées quand l'équation étant résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on trouve

$$\frac{dy}{dx}=X.Y;$$

et par conséquent cette séparation s'opère immédiatement dans toute équation qui n'est formée que de deux termes.

386. La séparation des variables s'opère quelquefois au moyen d'une transformation, ou d'un changement de variables. L'exemple le plus remarquable est celui de l'équation

$$\frac{dy}{dx}+Py+Q=0, \qquad \text{ou} \qquad dy+Pydx+Qdx=0,$$

dans laquelle P, Q désignent des fonctions de x seule, et que l'on appelle *équation linéaire du premier ordre*, ou *équation du premier degré et du premier ordre*, parce qu'elle ne contient que la première puissance de la fonction y et de son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. Soit fait

$$y=Xt, \qquad \text{d'où} \qquad dy=tdX+Xdt,$$

en désignant par X une fonction de x et par t une nouvelle variable. Ces valeurs, substituées dans l'équation proposée, donnent

$$tdX+Xdt+PXtdx+Qdx=0.$$

Or la fonction X étant indéterminée, on peut la déterminer par la condition que l'équation soit partagée dans les deux suivantes :

$$tdX+Qdx=0, \qquad \text{et} \qquad dt+Ptdx=0.$$

Les variables sont séparées dans la seconde, qui donne,

$$\frac{dt}{t}=-Pdx, \qquad lt=-\int Pdx, \qquad t=e^{-\int Pdx};$$

et cette valeur de t étant substituée dans la première il vient

$$dX=-dx.Qe^{\int Pdx}, \qquad X=-\int dx.Qe^{\int Pdx}+A.$$

Mettant ces valeurs de X et t dans $y=Xt$, on trouve donc

$$y=e^{-\int Pdx}\left(-\int dx.Qe^{\int Pdx}+A\right),$$

pour l'intégrale générale de l'équation proposée, A étant la constante arbitraire.

387. On peut intégrer par la même méthode les équations de la forme

$$y^{m-1}.dy+Py^{m}.dx+Qdx=0,$$

P et Q désignant toujours des fonctions quelconques de x. En effet, cette dernière équation deviendra semblable à celle du n° précédent si l'on pose $y^m=z$.

388. Soit encore une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

Faisant $\frac{y}{x}=t$, d'où $y=xt$, $\frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}$, cette équation se change en

$$t+x\frac{dt}{dx}+f(t)=0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dt}{t+f(t)}+\frac{dx}{x}=0,$$

dans lesquelles les variables sont séparées.

Du facteur propre à rendre l'équation intégrable.

389. Pour qu'une équation différentielle

$$Pdx+Qdy=0,$$

se présente sous la forme différentielle exacte d'une fonction des deux variables x,y, il est nécessaire en général que cette équation soit le résultat immédiat de la différenciation de l'équation primitive. Mais lors même que cette circonstance a lieu, l'équation différentielle ne se présente pas toujours sous la forme d'une différentielle exacte, parce que la différenciation introduit quelquefois des facteurs communs aux différents termes, qui disparaissent quand on égale la différentielle à zéro. Par exemple, l'équation primitive étant

$$\frac{y}{x}=a,$$

la différentielle du premier membre est $\frac{xdy-ydx}{x^2}$, et en égalant cette quantité à zéro, on aura simplement

$$xdy-ydx=0,$$

dont le premier membre n'est point une différentielle exacte.

390. Quelle que soit d'ailleurs l'origine d'une équation différentielle, on démontre qu'il existe toujours un facteur variable tel que si l'équation est multipliée par ce facteur, elle deviendra une différentielle exacte. En effet, supposons l'équation proposée mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx}+V=0,$$

V désignant une fonction quelconque de x,y. L'intégrale générale de cette équation aura pour premier membre une certaine fonction de x,y et d'une certaine constante arbitraire a, qui ne se trouve pas dans l'équation différentielle. Admettons qu'ayant résolu cette intégrale générale par rapport à a, on l'ait mise sous la forme

$$U=a,$$

U désignant une fonction de x,y. Si nous différencions alors cette équation, il viendra

$$\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}+\frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{dy}}=0,$$

équation dans laquelle la constante a a disparu, et qui doit par conséquent être identique avec l'équation différentielle proposée. On doit donc avoir

$$\frac{dy}{dx}+V=\frac{dy}{dx}+\frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{dy}}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy}{dx}+V\right)\frac{dU}{dy}=\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Or la quantité $\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}$ est la fonction dérivée complète de la fonction U. Donc il en sera de même de la quantité $\frac{dy}{dx}+V$, lorsqu'on l'aura multipliée par $\frac{dU}{dy}$.

On est assuré d'après ce qui précède de l'existence d'un facteur par lequel l'équation proposée étant multipliée, cette équation devient immédiatement intégrable. De plus on voit quel doit être ce facteur, et qu'il serait connu si l'équation primitive était connue.

391. Soit, par exemple, l'équation primitive

$$y^2-2a(x+y)=0.$$

En la différenciant on trouve

$$ydy-a(dx+dy)=0;$$

en en éliminant la constante a entre ces deux équations on obtiendra l'équation différentielle

$$(2x+y)dy-ydx=0.$$

Cette équation ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité. Mettant l'équation primitive sous la forme

$$\frac{y^2}{2(x+y)}=a,$$

on a pour la dérivée du premier membre prise par rapport à y, $\frac{y^2+2xy}{2(x+y)^2}$. Mettant également l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x+y}=0,$$

si on la multiplie, conformément à ce qu'on a vu dans le

n° précédent, par le facteur $\frac{(2x+y)y}{2(x+y)^2}$, on trouvera

$$\frac{y^2+2xy}{2(x+y)^2}\frac{dy}{dx}-\frac{y^2}{2(x+y)^2}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{(y^2+2xy)dy-y^2dx}{2(x+y)^2}=0,$$

expression où l'on reconnaît la différentielle complète de la fonction $\frac{y^2}{2(x+y)}$, et dont par conséquent on déduit immédiatement l'équation primitive.

392. On conclut d'ailleurs de l'équation

$$\frac{dy}{dx}+\text{V}=\frac{\frac{d\text{U}}{dx}+\frac{d\text{U}}{dy}\frac{dy}{dx}}{\frac{d\text{U}}{dy}},$$

du n° 390, qu'outre le facteur $\frac{d\text{U}}{dy}$, il en existe une infinité d'autres qui auront la propriété de rendre la fonction $\frac{dy}{dx}+\text{V}$ une différentielle exacte. En effet, on remarquera que la quantité

$$\varphi(\text{U}).\left(\frac{d\text{U}}{dx}+\frac{d\text{U}}{dy}\frac{dy}{dx}\right)$$

est la dérivée complète d'une certaine fonction de U que nous désignerons par $\Phi(\text{U})$. Donc si on multipliait le premier membre de l'équation précédente par

$$\varphi(\text{U}).\frac{d\text{U}}{dy},$$

il deviendrait une dérivée exacte d'une certaine fonction de x,y. Cette fonction serait la fonction même qui a été désignée par $\Phi(\mathrm{U})$; en sorte que l'intégrale serait

$$\Phi(\mathrm{U})=const.,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\mathrm{U}=const.,$$

c'est-à-dire l'intégrale de l'équation proposée. Ainsi tous les multiplicateurs compris dans l'expression $\varphi(\mathrm{U})\frac{d\mathrm{U}}{dy}$, où φ désigne une fonction entièrement arbitraire, ramèneront toujours à cette même intégrale.

393. Nous avons obtenu dans le n° 386, pour l'intégrale de l'équation

$$dy+\mathrm{P}y\,dx+\mathrm{Q}dx=0,$$

dans laquelle P et Q désignent des fonctions de x seule,

$$y=e^{-\int \mathrm{P}dx}\left(-\int dx.\mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}+\mathrm{A}\right),$$

A étant la constante arbitraire. D'après ce qui précède on mettra donc cette intégrale sous la forme

$$\mathrm{A}=\int dx.\mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}+y.e^{\int \mathrm{P}dx}=\mathrm{U},$$

et le facteur par lequel il faudra multiplier l'équation différentielle pour la rendre intégrable sera, conformément au n° 390, $\frac{d\mathrm{U}}{dy}=e^{\int \mathrm{P}dx}$.

C'est ce qu'on peut vérifier directement ; car soit μ le facteur cherché, que nous supposerons devoir être une fonction de x seule. Comme le terme $\mu\mathrm{Q}dx$ est intégra-

ble, il s'agit seulement de déterminer μ par la condition de rendre une différentielle exacte la quantité

$$\mu dy+\mu Pydx;$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\frac{d\mu}{dx}=\mu P, \quad \text{ou} \quad \frac{d\mu}{\mu}=Pdx; \quad \text{d'où} \quad \mu=e^{\int Pdx}.$$

394. Soit en général l'équation

$$Pdx+Qdy=0,$$

P et Q désignant des fonctions quelconques de x et y. Si l'on représente par μ le facteur qui rendrait cette équation intégrable, la fonction μ devra évidemment satisfaire à la condition

$$\frac{d.\mu P}{dy}=\frac{d.\mu Q}{dx},$$

c'est-à-dire

$$P\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{dx}+\mu\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=0.$$

Mais cette dernière équation est presque toujours plus difficile à traiter que l'équation proposée elle-même.

395. Nous remarquerons d'ailleurs, que toutes les fois qu'on parvient à séparer les variables dans l'équation

$$Pdx+Qdy=0,$$

au moyen d'une transformation quelconque, on connaît immédiatement le facteur par lequel il faudrait multiplier cette équation pour rendre $Pdx+Qdy$ une différentielle exacte.

En effet, supposons qu'ayant remplacé x et y par

d'autres variables s et t, l'équation proposée soit devenue

$$\mathrm{M}ds+\mathrm{N}dt=0,$$

M et N étant des fonctions de s et t; et qu'en divisant les deux termes par la fonction V de s et t les variables se trouvent séparées, en sorte que $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{V}}$ soit une fonction de s seule, et que $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{V}}$ soit une fonction de t seule. La quantité $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{V}}ds+\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{V}}dt$ sera donc devenue une différentielle exacte. Or, en remplaçant dans cette quantité s et t par leurs valeurs en x et y, elle ne différera point de la quantité $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{V}}dx+\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{V}}dy$ (en concevant toujours que l'on ait mis dans V à la place de s et t leurs valeurs en x et y). Donc $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{V}}dx+\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{V}}dy$ serait nécessairement aussi une différentielle exacte.

396. Nous avons donné dans le n° 388, pour exemple de la séparation des variables, l'équation

$$f\left(\frac{y}{x}\right).dx+dy=0,$$

qui, en faisant $y=xt$, d'où $dy=tdx+xdt$, devient

$$[f(t)+t]\,dx+xdt=0,$$

et dans laquelle les variables se séparent lorsqu'on divise les deux termes par $x[f(t)+t]$. D'après ce qui précède, l'équation dont il s'agit doit donc être rendue intégrable en la multipliant par le facteur $\frac{1}{x[f(t)+t]}$, où l'on

remplacera t par sa valeur en x et y ; c'est-à-dire par le facteur $\frac{1}{x\left(f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\right)}$. En effet, cette équation devient alors

$$\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)dx+dy}{x\left(f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\right)}=0,$$

qui se met facilement sous la forme

$$\frac{dx}{x}+\frac{\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}}{f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}}=0:$$

celle-ci est intégrable, puisque $\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}$ est la différentielle de $\frac{y}{x}$.

Théorème des fonctions homogènes. — Intégration des équations homogènes.

397. On désigne par le nom de *Théorème des fonctions homogènes*, certaines relations qui existent entre une fonction homogène, c'est-à-dire une fonction composée de termes dans lesquels la somme des exposants des variables est un nombre constant, soit U une fonction homogène de plusieurs variables x, y, etc. En mettant tx à la place de x, ty à la place de y, etc., cette fonction deviendra t^nU, n désignant la somme des exposants des variables dans chaque terme. On peut d'ailleurs faire $t=1+g$, ce qui revient à mettre $x+gx$ à la place de

$x, y+gy$ à la place de y, etc. On aura en appliquant le théorème de Taylor,

$$(1+g)^n U = U + g\left(\frac{dU}{dx}x + \frac{dU}{dy}y + \text{etc.}\right) +$$
$$+\frac{g^2}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2U}{dxdy}xy + \frac{d^2U}{dy^2}y^2 + \text{etc.}\right) + \text{etc.};$$

et en développant le premier membre et égalant les termes affectés des mêmes puissances de l'indéterminée g,

$$nU = \frac{dU}{dx}x + \frac{dU}{dy}y + \text{etc.}$$
$$n(n-1)U = \frac{d^2U}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2U}{dxdy}xy + \frac{d^2U}{dy^2}dy^2 + \text{etc.}$$
etc.

398. La considération de ces relations facilite quelquefois l'intégration des fonctions de plusieurs variables. Lorqu'une fonction est homogène, une différenciation effectuée sur cette fonction n'en altère pas l'homogénéité. Par conséquent si la fonction différentielle

$$Pdx + Qdy + \text{etc.},$$

était homogène, et satisfaisait aux conditions d'intégrabilité, on aurait immédiatement, en désignant par U son intégrale, et par n le degré de cette intégrale, qui surpasse toujours d'une unité le degré commun des fonctions P, Q, etc.,

$$nU = Px + Qy + \text{etc.} + \textit{const.}$$

399. Lorsque dans l'équation différentielle

$$Pdx + Qdy = 0,$$

les fonctions P, Q des variables x, y, sont homogènes,

ces variables se séparent facilement, et par conséquent, l'équation devient immédiatement intégrable. En effet, faisant $y=xt$, les fonctions P,Q prennent alors la forme px^n, qx^n; p,q étant des fonctions de t seule, et n désignant la somme des exposants de x et y dans les termes de l'équation proposée. Cette équation devient donc

$$(p+qt)dx+qxdt=0, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x}+\frac{qdt}{p+qt}=0,$$

dont l'intégrale est

$$lx+\int dt.\frac{q}{p+qt}=const.$$

dans laquelle on devra, après avoir effectué l'intégration qui est indiquée, remplacer t par sa valeur $\frac{y}{x}$.

400. Soit pour exemple l'équation

$$(x-2y)dx+ydy=0.$$

Faisant $y=xt$, elle devient

$$\frac{dx}{x}+\frac{tdt}{1-2t+t^2}=0,$$

dont l'intégrale est

$$lx+l(1-t)+\frac{1}{1-t}=\text{A},$$

A étant la constante arbitraire. En mettant pour t sa valeur $\frac{y}{x}$, on a

$$l(x-y)+\frac{x}{x-y}=\text{A},$$

qui peut s'écrire

$$x-y=a.e^{-\frac{x}{x-y}},$$

a étant une autre constante.

401. Soit encore l'équation

$$(x^2+xy-2y^2)dx+(y^2-3x^2)dy=0.$$

Elle devient, en faisant $y=tx$,

$$\frac{dx}{x}+\frac{(t^2-3)dt}{t^3-2t^2-2t+1}=0.$$

Par les méthodes exposées dans l'article XXIV, on trouve,

$$\frac{t^2-3}{t^3-2t^2-2t+1}=-\frac{2}{5(t+1)}+\frac{7-\sqrt{5}}{5(2t-3-\sqrt{5})}+\frac{7+\sqrt{5}}{5(2t-3+\sqrt{5})};$$

ce qui change l'équation ci-dessus, en

$$\frac{dx}{x}-\frac{2}{5}\frac{dt}{t+1}+\frac{7-\sqrt{5}}{5}\frac{dt}{2t-3-\sqrt{5}}+\frac{7+\sqrt{5}}{5}\frac{dt}{2t-3+\sqrt{5}}=0,$$

dont l'intégrale est

$$lx-\frac{2}{5}l(t+1)+\frac{7}{10}l(t^2-3t+1)+\frac{1}{2\sqrt{5}}l\frac{2t-3+\sqrt{5}}{2t-3-\sqrt{5}}=lA.$$

Cette équation peut s'écrire,

$$\left(\frac{y+x}{x^2}\right)^{\frac{2}{5}}(y^2-3yx+x^2)^{\frac{7}{10}}\left(\frac{2y-3x+x\sqrt{5}}{2y-3x-x\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{5}}}=A.$$

402. Puisque, après avoir fait $y=xt$ dans l'équation

$$Pdx+Qdy=0,$$

supposée homogène, et n marquant le degré commun des fonctions P,Q, il vient

$$(px^n+qx^nt)dx+qx^{n+1}dt=0,$$

où les variables se séparent en divisant par $x(px^n+qx^nt)$,

il résulte de ce qui a été dit n° **395**, que le facteur par lequel l'équation précédente doit être multipliée pour devenir intégrable est $\frac{1}{x(px^n+qx^nt)}$, en remplaçant t par sa valeur, c'est-à-dire $\frac{1}{Px+Qy}$. Ainsi la fonction $\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}$ sera nécessairement une différentielle exacte.

C'est ce qu'on peut reconnaître directement : car soit μ un facteur par lequel il faudrait multiplier $Pdx+Qdy$ pour rendre cette quantité une différentielle exacte, facteur que nous supposerons une fonction homogène de x et y. On pourra donc écrire

$$\mu Pdx+\mu Qdy=dU,$$

U étant une fonction de x et y; et d'après le n° **398**, il s'ensuivra

$$\mu Px+\mu Qy=kU,$$

k représentant le degré commun des fonctions μP et μQ augmenté d'une unité. Divisant ces deux équations l'une par l'autre, il viendra

$$\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}=\frac{dU}{kU}.$$

Or $\frac{dU}{kU}$ est une différentielle exacte. Donc le premier membre en est également une.

403. Dans l'exemple du n° **400**, l'équation proposée

$$(x-2y)dx+ydy=0$$

deviendra intégrable, d'après ce qui précède, en la multipliant par $\frac{\quad}{(x-2y)x+y^2}$, qui revient à $\frac{1}{(x-y)^2}$. En effet, l'équation

$$\frac{(x-2y)dx+ydy}{(x-y)^2}=0,$$

peut s'écrire

$$\frac{dx-dy}{x-y}+\frac{dx}{x-y}-\frac{x(dx-dy)}{(x-y)^2}=0,$$

(comme on peut le vérifier en réduisant tous les termes au même dénominateur), ou bien

$$d.l(x-y)+d\left(\frac{x}{x-y}\right)=0,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'intégrale trouvée ci-dessus.

Équations du premier ordre dans lesquelles se trouvent la seconde puissance ou les puissances supérieures du coefficient différentiel.

404. Lorsque l'équation différentielle contient les puissances supérieures du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, on peut la concevoir résolue algébriquement par rapport à ce coefficient considéré comme l'inconnue. Si l'on égale ensuite à zéro les facteurs correspondants à chacune des racines, on aura autant d'équations différentielles dans lesquelles $\frac{dy}{dx}$ ne sera plus qu'au premier degré, et dont on pourra prendre les intégrales qui seront complétées chacune par une constante arbitraire. Le produit de ces diverses intégrales donnera l'intégrale générale de l'équation proposée. D'ailleurs, on ne diminue point la généralité de cette intégrale en admettant que ce soit la même constante arbitraire, qui entre

dans tous ces facteurs. D'où l'on voit que toute équation différentielle du premier ordre, dans laquelle entre la puissance n du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, a pour intégrale une équation primitive, où la constante arbitraire est élevée à la puissance n.

On a donné, n° 382, un exemple d'une équation de cette espèce.

405. Souvent la résolution algébrique de l'équation proposée n'est pas possible, et par conséquent le procédé qui vient d'être indiqué, ne peut être appliqué. On parvient quelquefois à intégrer une équation du genre de celles dont il s'agit en la mettant d'abord sous la forme

$$y=L,$$

L désignant une fonction de x et de $\frac{dy}{dx}$, que nous désignerons pour abréger par y'. Si ensuite l'on différencie, il viendra

$$y'=\frac{dL}{dx}+\frac{dL}{dy'}\frac{dy'}{dx},$$

équation différentielle du premier ordre entre y' et x. Si elle peut être intégrée, on obtiendra une équation entre y' et x avec une constante arbitraire ; et en éliminant ensuite y' entre cette équation et la proposée, on obtiendra l'intégrale cherchée.

406. La méthode dont il s'agit s'applique à l'équation

$$y=Mx+N,$$

M et N désignant des fonctions quelconques de $\frac{dy}{dx}$ ou y'. En effet, cette équation donne

$$dy = \mathrm{M}dx + x\frac{d\mathrm{M}}{dy'}dy' + \frac{d\mathrm{N}}{dy'}dy',$$

qui peut s'écrire (puisque $dy = y'dx$)

$$(\mathrm{M}-y')dx + x\frac{d\mathrm{M}}{dy'}dy' + \frac{d\mathrm{N}}{dy'}dy' = 0,$$

et rentre dans la forme de l'équation considérée n° 385 et 391. Le premier membre deviendra donc intégrable en multipliant par le facteur $e^{\int\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}-y'}}$, et son intégrale sera

$$x + e^{-\int\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}-y'}}.\left(\int\frac{d\mathrm{N}}{\mathrm{M}-y'}.e^{\int\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}-y'}} + \mathrm{A}\right) = 0,$$

A étant la constante arbitraire. Il restera à éliminer y entre cette équation et la proposée

407. Le cas où $\mathrm{M} = y'$, en sorte que l'équation proposée est

$$y = y'x + \mathrm{N},$$

a ét remarqué. On a alors en différenciant

$$\left(x + \frac{d\mathrm{N}}{dy'}\right)dy' = 0,$$

équation à laquelle on peut également satisfaire en posant

$$x + \frac{d\mathrm{N}}{dy'} = 0, \qquad \text{et} \qquad dy' = 0.$$

L'équation $x + \frac{d\mathrm{N}}{dy'} = o$ donnera une valeur de y' qui, étant substituée dans la proposée, conduira à une équation primitive : mais cette équation ne contenant pas de

constante arbitraire sera une solution particulière, conformément à ce qui a été dit n° 379. L'équation $dy'=0$ donne en l'intégrant

$$y'=\text{A},$$

A étant la constante arbitraire : cette valeur mise dans la proposée à la place de y' donnera l'intégrale générale cherchée. Cette intégrale est l'équation d'une ligne droite dont la valeur attribuée à la constante A détermine l'inclinaison sur l'axe des x.

Solutions particulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables.

408. On a remarqué n° 379, qu'il existait quelquefois des équations primitives qui satisfont à une équation différentielle, et qui néanmoins ne sont point comprises dans son *intégrale générale*. Les équations dont il s'agit, appelées *solutions particulières*, se distinguent principalement en ce qu'elles ne contiennent pas la constante arbitraire dont la présence est le caractère essentiel de l'intégrale générale.

Soit

$$\text{F}(x,y,a)=0 \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Cette dernière équation sera le résultat de l'élimination de la constante a entre l'équation (1) et sa différentielle immédiate, qui est

$$\frac{d\text{F}}{dx}+\frac{d\text{F}}{dy}\frac{dy}{dx}=0\,;$$

et conformément à ce qui a été exposé dans les nos 376 et suivants, nous regardons les équations (1) et (2) comme appartenant au sytème d'une infinité de lignes courbes qui diffèrent seulement les unes des autres par les diverses valeurs que l'on peut attribuer à la constante a.

Cela posé, admettons que l'on ait donné dans l'équation (1) à la constante a une valeur déterminée, et considérons la courbe correspondante à cette valeur. Si, à partir de la valeur dont il s'agit, a augmente de la quantité infiniment petite da, l'équation (1) deviendra

$$F+\frac{dF}{da}\,da=0.$$

Cette dernière équation appartiendra à une seconde courbe infiniment voisine de la première ; et les valeurs de x,y qui satisferont simultanément aux deux équations

$$F=0,\qquad \text{et}\qquad F+\frac{dF}{da}\,da=0,$$

ou si l'on veut aux deux équations

$$F=0,\qquad \text{et}\qquad \frac{dF}{da}=0,$$

appartiendront au point d'intersection de ces deux courbes.

409. Admettons maintenant que l'on élimine la constante a entre les deux équations

$$F=0,\qquad \text{et}\qquad \frac{dF}{da}=0.$$

Le résultat de cette élimination sera une équation pri-

mitive entre x et y appartenant à la ligne qui est le lieu des points d'intersection de toutes les courbes comprises dans l'intégrale générale, et qui correspondent aux diverses valeurs de la constante a. Cette ligne est évidemment touchée par toutes les courbes dont il s'agit, et elle en forme l'enveloppe. L'équation obtenue de cette manière, et qui ne contient pas de constante arbitraire, est la solution particulière de l'équation $f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0$, à laquelle elle doit satisfaire, puisque la valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'un quelconque des points de l'enveloppe est commune à cette enveloppe et à la courbe comprise dans l'intégrale générale qui la touche en ce point.

Il faut remarquer d'ailleurs, que les courbes représentées par une équation différentielle et par son intégrale générale, c'est-à-dire les courbes correspondantes aux intégrales particulières, n'ont pas toujours une enveloppe; ou qu'il n'arrive pas toujours que ces courbes sont tangentes à une certaine ligne d'une nature différente de la leur. Alors la solution particulière n'existe pas. On reconnaît qu'il n'existe pas de solution particulière lorsque l'équation $\frac{dF}{da}=0$ ne peut donner pour la constante a une valeur exprimée en x,y ; ou plus exactement lorsqu'on ne peut déduire des équations $F=0$ et $\frac{dF}{da}=0$, par l'élimination de a, une équation entre x et y qui ne rentre pas dans l'intégrale générale et n'en soit pas un cas particulier.

410. Il est facile de reconnaître directement que la recherche de la solution particulière, c'est-à-dire d'une

équation qui, ne contenant pas la constante a, satisfait à l'équation différentielle (2), doit s'opérer par l'élimination de a entre l'équation (1) et l'équation $\frac{dF}{da}=0$. En effet, tout se réduit, pour trouver l'équation dont il s'agit, à mettre à la place de a, dans l'équation (1), une fonction de x,y convenablement déterminée. Or, supposons que cette substitution ait été faite, et regardons a comme une fonction de x,y. L'équation différentielle déduite immédiatement de l'équation (1) sera alors

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{da}\frac{da}{dx}=0.$$

Mais l'équation (2) résulte par l'hypothèse de l'élimination de a, supposée constante, entre l'équation (1) et son équation différentielle, qui est alors $\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0$. Donc il suffit, pour obtenir le même résultat, a étant supposée variable et fonction de x,y, de déterminer cette fonction a par la condition de faire disparaître le terme $\frac{dF}{da}\frac{da}{dx}$; car les deux équations entre lesquelles l'élimination s'opérera étant les mêmes dans les deux cas, l'équation (2) qui en résultera sera aussi la même. On peut faire disparaître ce terme en posant $\frac{da}{dx}=0$, ce qui donne a égale à une constante quelconque et répond au cas de l'intégrale générale; ou en posant $\frac{dF}{da}=0$, ce qui donnera pour a une fonction de x,y, qui étant substituée dans l'équation (1) ou $F=0$, conduira à une équation primitive sans constante arbitraire, et satisfaisant à l'é-

quation différentielle, qui sera par conséquent la solution particulière demandée.

411. D'après ce qui précède, on peut obtenir la solution particulière quand on connaît l'intégrale générale. Cette solution particulière peut être aussi déduite de l'équation différentielle. Considérons l'une des courbes comprises dans l'intégrale générale et correspondante à une valeur a de la constante. Cette courbe sera à la fois coupée et touchée par la courbe contiguë correspondante à la valeur $a+da$, dans un des points de l'enveloppe dont la solution particulière est l'équation. Or, cette même courbe correspondante à la valeur a de la constante n'est plus touchée, mais est coupée par les autres courbes correspondantes aux valeurs de la constante qui diffèrent de a d'une quantité finie. Il suit de là que l'équation différentielle

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

étant résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, donnera généralement deux ou plusieurs valeurs différentes pour ce coefficient différentiel, si l'on attribue à x et y des valeurs quelconques. Mais si l'on attribue à x et y les valeurs qui appartiennent aux points de l'enveloppe, ou à la solution particulière qui représente cette enveloppe, il y aura au moins deux des valeurs de $\frac{dy}{dx}$ qui deviendront égales entre elles. Ainsi la solution particulière doit offrir ce double caractère; 1° De satisfaire à l'équation différentielle proposée

$$f(x,y,y')=0,$$

$\left(\text{en écrivant pour abréger } y' \text{ au lieu de } \frac{dy}{dx}\right)$; 2° De rendre égales au moins deux des valeurs de y' qui satisfont à cette équation. Or, l'existence de deux ou plusieurs valeurs égales de y' données par l'équation précédente est exprimée par la condition

$$\frac{df}{dy'}=0:$$

d'où l'on conclut qu'en éliminant y' entre les deux équations

$$f(x,y,y')=0, \qquad \text{et} \qquad \frac{df}{dy'}=0,$$

on obtiendra, si elles existent, les solutions particulières demandées.

412. On trouvera encore la solution particulière de la manière suivante. Supposons que l'équation différentielle proposée $f(x,y,y')=0$ ayant été résolue par rapport à y', on lui ait donné la forme suivante

$$y'+V=0,$$

V étant une fonction de x,y. Puisque les courbes qui sont représentées par les intégrales particulières se coupent en général, et se touchent en même temps qu'elles se coupent seulement dans les points qui appartiennent à l'enveloppe, on voit que la fonction $-V$ qui donne la valeur de y' doit représenter généralement au moins deux valeurs différentes pour cette quantité ; mais que si l'on attribue à x et y les valeurs qui appartiennent à l'enveloppe, les deux valeurs de cette même fonction $-V$ deviendront égales entre elles. D'après cela nous pouvons nous représenter $-V$ comme l'ordonnée verticale d'une surface dont les abscisses horizontales seraient x

et y; et cette surface doit avoir une figure telle que l'ordonnée verticale la coupant en général au moins dans deux points, elle la rencontre en un seul point, lorsque les abscisses x et y appartienent à la solution particulière. Il en résulte que la surface dont il s'agit doit être touchée par le cylindre vertical qui aurait pour base l'enveloppe, ou la courbe représentée par la solution particulière; et il est aisé d'en conclure que, pour les valeurs x et y qui appartiennent à cette solution, on doit avoir à la fois

$$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{0}, \qquad \frac{dV}{dy}=\frac{1}{0};$$

et par conséquent

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{0}, \qquad \frac{dy'}{dy}=\frac{1}{0}.$$

L'expression de ces conditions donnera donc la solution particulière s'il en existe une.

413. On peut remarquer d'ailleurs, qu'en différenciant l'équation proposée

$$f(x,y,y')=0,$$

on a

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dx}=0.$$

Mais le coefficient du dernier terme étant nul, d'après le n° précédent, pour les valeurs de x,y qui appartiennent à la solution particulière, ce terme disparaît, d'où il suit que la valeur du coefficient du second ordre $\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$ demeure indéterminée; et il en sera de même des coefficients de tous les ordres supérieurs. Cette cir-

constance résulte de ce que chacun des points de l'enveloppe appartient à trois courbes différentes qui ont entre elles un contact du premier ordre, et pour lesquelles le coefficient du premier ordre $\frac{dy}{dx}$ a une valeur commune; savoir les deux courbes données par les intégrales particulières qui répondent aux valeurs $a+da$ de la constante arbitraire, et l'enveloppe elle-même qui est également comprise dans l'équation différentielle. Mais les valeurs des coefficients différentiels des ordres supérieurs sont généralement différentes pour ces diverses courbes; et comme les équations dont ces coefficients dépendent ne pourraient donner qu'une seule valeur, l'analyse résout cette difficulté en laissant cette valeur indéterminée. Ayant ainsi déduit de l'équation différentielle proposée l'expression de $\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$, et égalant séparément à zéro le numérateur et le dénominateur de cette expression, on aura deux équations contenant y' qui doivent subsister en même temps que la proposée pour les valeurs de x, y' qui appartiennent à la solution particulière. Si l'on élimine y' entre chacune de ces équations et la proposée, et si les résultats de cette élimination ont un facteur commun, ce facteur sera la solution particulière cherchée. Si ces résultats ne peuvent subsister ensemble, on en conclura qu'il n'existe pas de solution particulière.

414. Si l'on applique ce qui précède à l'équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx}-y+b=0,$$

considérée n° 380, et qui a pour intégrale générale

$$y-ax-b=0,$$

a étant la constante arbitraire, on trouvera pour la solution particulière le système des valeurs $x=0$, $y=b$ qui appartiennent au point d'intersection commun de toutes les droites représentées par l'intégrale générale.

415. Mais si l'on traite de la même manière l'équation

$$\frac{dy}{dx}-a-2x=0,$$

considérée n° 381, qui a pour intégrale générale

$$y-ax-x^2+b=0,$$

b étant la constante arbitraire, on ne trouvera aucun résultat. En effet il ne peut y avoir ici de solution particulière, puisque les courbes représentées par ces équations n'ont pas d'enveloppe. Il en est de même à l'égard de l'équation du n° 382.

416. Considérons l'équation

$$y=ax+b,$$

qui appartient à une ligne droite dont la position est déterminée par les valeurs des constantes a et b. La distance de cette ligne à l'origine des coordonnées a pour valeur $\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}$; par conséquent, si l'on élimine b entre l'équation précédente et l'équation

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}=r,$$

(dans laquelle r désigne une constante), l'équation résultante

$$y=ax+r\sqrt{a^2+1},$$

appartiendra à toutes les lignes droites qui touchent le cercle dont le rayon est r, et dont le centre est à l'origine des coordonnées.

Si l'on différencie cette équation, et si l'on élimine la constante a au moyen de l'équation différentielle, il viendra en écrivant y' au lieu de $\frac{dy}{dx}$,

$$y=xy'+r\sqrt{y'^2+1}.$$

On conclura de tout ce qui a été exposé précédemment que cette équation différentielle a pour intégrale l'équation primitive

$$y=ax+r\sqrt{a^2+1},$$

dans laquelle a est la constante arbitraire, et qui représente, aussi bien que l'équation différentielle, le système de toutes les lignes droites tracées à la distance r de l'origine des coordonnées, et de plus qu'elle a pour solution particulière l'équation

$$x^2+y^2=r^2,$$

qui appartient au cercle touché par toutes ces lignes droites, et qui est le lieu de leurs intersections.

En effet, si l'équation différentielle

$$y=xy'+r\sqrt{y'^2+1}$$

était proposée, on remarquerait en premier lieu qu'elle tombe dans le cas du n° 407. On trouve immédiatement, d'après ce qui a été dit dans ce numéro, $y=ax+r\sqrt{a^2+1}$ pour l'intégrale générale. De plus le facteur $x+\frac{dN}{dy'}$ de-

vient ici $x+\frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}}$. En l'égalant à zéro on en déduit la valeur $y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, et cette valeur étant substituée dans l'équation différentielle proposée, donne $y=\sqrt{r^2-x^2}$ qui est la solution particulière.

Si, conformément au n° 409, on veut déduire la solution particulière de l'intégrale générale

$$y=ax+r\sqrt{a^2+1},$$

il faudra éliminer a entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à a, qui est

$$0=x+\frac{ra}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Le résultat de cette élimination est évidemment le même qui vient d'être obtenu.

Si, d'après le n° 411, on veut déduire la solution particulière de l'équation différentielle, on devra éliminer y' entre les deux équations

$$y-xy'-r\sqrt{y'^2+1}=0 \qquad \text{et} \qquad x+\frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}}=0,$$

ce qui donne encore le même résultat.

D'après le principe énoncé n° 413, il faudrait différencier l'équation proposée

$$y-xy'-r\sqrt{y'^2+1}=0$$

pour en déduire la valeur de y'', ce qui donne

$$xy''+\frac{ry'.y''}{\sqrt{y'^2+1}}=0.$$

Cette équation, dans le cas particulier que nous considérons, ne donne pas une expression générale de y'' en x, y et y', parce que la valeur de y'' est toujours nulle pour les intégrales particulières, qui représentent ici des lignes droites. Mais elle se décompose dans les deux facteurs

$$y''=0 \qquad \text{et} \qquad x+\frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}}=0,$$

dont l'un appartient à l'intégrale générale et l'autre à la solution particulière.

Enfin si, conformément au n° 412, on résout l'équation différentielle proposée par rapport à y' pour la mettre sous la forme $y'+V=0$, on trouvera

$$y'+\frac{xy\pm r\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r^2-x^2}=0.$$

On voit que cette équation donne en général pour y' deux valeurs différentes, appartenant aux deux tangentes au cercle qui se croisent dans le point déterminé par les valeurs attribuées à x et y. Mais ces valeurs de y' deviendront égales si le radical de l'équation précédente est nul, c'est-à-dire si x et y satisfont à l'équation

$$x^2+y^2-r^2=0,$$

qui donne par conséquent la solution particulière. La condition qui rend égales les deux valeurs de y' est ici évidente : on peut vérifier que cette même condition résulterait également de la supposition de $\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{0}$ ou $\frac{dy'}{dy}=\frac{1}{0}$.

417. L'équation différentielle que l'on vient de considérer est un cas particulier de l'équation

$$y=xy'+N$$

du n° 407, dans laquelle N est une fonction quelconque de y'. Il est clair par ce qui précède que l'intégrale générale de cette équation appartient à un système de lignes droites dont les équations se déduisent de la proposée, en y remplaçant y' par une constante arbitraire. De plus toutes ces lignes droites touchent la courbe, dont on obtient l'équation en éliminant y' entre les deux équations suivantes

$$y=xy'+N\,; \qquad \text{et} \qquad x+\frac{dN}{dy'}=0.$$

418. Quant à l'équation générale

$$y=Mx+N,$$

considérée n° 406, dans laquelle M et N sont des fonctions de y' seule, l'intégrale générale a été donnée dans ce numéro. La solution particulière, c'est-à-dire l'équation de la courbe touchée par toutes les courbes correspondantes aux intégrales particulières, s'obtiendra en éliminant y' entre les équations

$$y=Mx+N \qquad \text{et} \qquad e^{-\int\frac{dM}{M-y'}}=0,$$

dont la dernière revient à $\int\frac{dM}{M-y'}=\frac{1}{0}$.

419. Il est quelquefois utile de savoir tracer un système de courbes d'une espèce donnée d'après la condition qu'elles soient toutes tangentes à une autre courbe

également donnée. Ce problème revient à déterminer une équation primitive, dont on donne la forme générale, de manière que son équation dérivée ait pour solution particulière une équation déterminée. Soit généralement

$$F(x, y, a, b, \text{etc.}) = 0,$$

une équation dans laquelle a,b, etc., sont des constantes. On demande que le système des courbes qui pourraient être données par cette équation en faisant varier les constantes, touche ou ait pour enveloppe la courbe représentée par l'équation

$$\Phi(x,y)=0.$$

Différentiant les deux équations proposées on trouve

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0, \qquad \frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Phi}{dy}\frac{dy}{dx}=0;$$

et en éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre ces deux équations, l'équation résultante, qui est

$$\frac{dF}{dx}\frac{d\Phi}{dy}-\frac{dF}{dy}\frac{d\Phi}{dx}=0,$$

exprime la condition que les courbes représentées par les équations proposées aient un contact du premier ordre. Si l'on élimine donc x et y entre les trois équations

$$F(x,y,a,b,\text{etc.})=0, \qquad \Phi(x,y)=0, \qquad \frac{dF}{dx}\frac{d\Phi}{dy}-\frac{dF}{dy}\frac{d\Phi}{dx}=0,$$

le résultat, qui sera une équation entre les constantes a,b, etc., exprimera la relation qui doit subsister entre a et les autres constantes pour que la condition dont il

s'agit soit satisfaite. Si l'on résout donc cette dernière équation par rapport à l'une des autres constantes, telle que b, et que l'on mette sa valeur dans l'équation proposée

$$F(x, y, a, b, \text{etc.})=0,$$

le résultat de cette élimination aura la propriété demandée.

420. Soit donnée, par exemple, l'équation

$$y^2+ax+b=0,$$

appartenant à une parabole dont le grand axe coïncide avec l'axe des x; et l'équation

$$x^2+y^2-r^2=0,$$

appartenant à un cercle dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont r représente le rayon. On demande de déterminer les paraboles représentées par la première équation, de manière qu'elles soient toutes tangentes à ce cercle. Différentiant les équations précédentes, on a

$$2yy'+a=0, \qquad \text{d'où} \qquad 2x-a=0.$$
$$2x+2yy'=0,$$

Eliminant x et y entre les trois équations

$$y^2+ax+b=0, \qquad x^2+y^2-r^2=0, \qquad 2x-a=0;$$

on trouve la relation

$$r^2+\frac{a^2}{4}+b=0, \qquad \text{d'où} \qquad b=-\frac{a^2}{4}-r^2.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation $y^2+ax+b=0$, la change en

$$y^2+ax-\frac{a^2}{4}-r^2=0,$$

qui aura la propriété demandée.

En effet, si l'on applique à cette équation la règle du n° 404, pour obtenir la solution particulière de l'équation dérivée dont elle serait l'intégrale, on devra éliminer la constante arbitraire a entre les deux équations

$$y^2+ax-\frac{a^2}{4}-r^2=0, \qquad \text{et} \qquad 2x-a=0;$$

ce qui donnera pour cette solution particulière

$$y^2+x^2-r^2=0.$$

La dérivée de l'équation

$$y^2+ax-\frac{a^2}{4}-r^2=0,$$

se trouve d'ailleurs en différentiant par rapport à x, ce qui donne

$$2yy'+a=0;$$

puis en éliminant la constante a entre cette équation et la différentielle. On obtient ainsi l'équation dérivée

$$y^2-2xyy'-y^2y'^2-r^2=0,$$

à laquelle on peut appliquer les règles des n°s 411 et suivants. Si, par exemple, on la résout par rapport à y', il vient

$$y'=\frac{-x\pm\sqrt{y^2+x^2-r^2}}{y}.$$

L'équation qui exprimera l'égalité des deux valeurs de y, c'est-à-dire la solution particulière, est donc

$$y^2+x^2-r^2=0.$$

421. Considérons encore l'équation

$$z=x\,\text{tang}.\theta-x^2\frac{g}{2V^2\cos.^2\theta}.$$

qui appartient à la trajectoire d'un projectile lancé dans le vide. En faisant varier l'angle de projection θ, on obtient diverses courbes ayant une enveloppe dont l'équation se trouvera, conformément au n° 409, en différentiant par rapport à θ, ce qui donne

$$0=1-\frac{gx}{V^2}\,\text{tang}.\theta\,;$$

puis en éliminant θ entre cette dernière équation et la précédente. On trouvera ainsi pour l'équation cherchée

$$x^2=\frac{V^2}{g^2}(V^2-2gz).$$

La courbe tangente à toutes les trajectoires est donc une parabole dont l'axe est vertical, et dont le sommet est à la hauteur $\frac{V^2}{2g}$ au-dessus de l'origine.

XXXIII. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A DEUX VARIABLES DU SECOND ORDRE ET DES ORDRES SUPÉRIEURS.

422. Une équation différentielle du second ordre a généralement la forme

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0\,:$$

x est la variable indépendante, y une autre variable dont la valeur dépend de celle de x au moyen de la relation établie par cette équation.

On peut faire sur l'équation dont il s'agit, des remarques analogues à celles qui ont été faites dans le n° 376. Considérons x comme l'abscisse et y comme l'ordonnée d'une courbe. Si l'on voulait construire la courbe à la-

quelle appartient l'équation précédente, on la supposerait résolue par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$, dont la valeur se trouvera donnée en fonction de x, y et $\frac{dy}{dx}$. On fixerait ensuite arbitrairement les valeurs de x et y, c'est-à-dire, un point quelconque par lequel on voudra faire passer la courbe. On fixerait de plus arbitrairement la valeur de $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire l'inclinaison que la courbe devra avoir en ce point. L'équation proposée donnera alors une valeur déterminée pour $\frac{d^2y}{dx^2}$, au moyen de laquelle le tracé de la courbe dont il s'agit pourra être effectué. En effet, faisant varier x d'une quantité très-petite Δx, on obtiendra approximativement les valeurs des coordonnées d'après le tableau suivant :

Abscisses.	Ordonnées correspondantes.
x	y
$x+\Delta x$	$y+\frac{dy}{dx}\Delta x$
$x+\Delta x+\Delta x$	$y+\frac{dy}{dx}\Delta x+\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x\right)\Delta x.$

On pourra donc construire la courbe avec une exactitude d'autant plus grande que les variations Δx seront prises plus petites. Ainsi, l'équation proposée exprime une propriété commune à une infinité de courbes que nous concevons tracées sur un plan. Elle détermine la figure de ces courbes lorsqu'on s'est donné un point par lequel elles doivent passer, et la direction de la tangente en ce point. Cette équation doit être regardée

comme ayant une signification plus étendue que l'équation du premier ordre, puisqu'il ne suffit plus ici pour déterminer la courbe de se donner un de ses points ; il faut encore se donner la direction de la tangente en ce point.

On voit d'ailleurs, que le choix entre l'une quelconque des courbes qui peuvent être représentées par l'équation proposée dépend ici de deux quantités arbitraires dont l'une déterminerait y, et l'autre $\frac{dy}{dx}$, quand on se serait donné x.

423. L'intégrale générale de l'équation du second ordre proposée devant offrir la même généralité que cette équation, devra évidemment contenir deux constantes arbitraires. De plus cette intégrale devra satisfaire à l'équation différentielle proposée. Ces conditions suffisent pour que l'intégrale et sa différentielle représentent toutes deux le même système de courbes.

424. Considérons en général une équation primitive

$$F(x,y,a,b)=0$$

dans laquelle a et b sont deux constantes et où nous regardons y comme une fonction de x. On pourra parvenir à son équation dérivée du second ordre de plusieurs manières différentes : 1° en différentiant deux fois de suite par rapport à x, puis éliminant entre cette équation et ses deux différentielles les constantes a et b ; 2° en différentiant une fois, puis éliminant successivement a et b entre l'équation primitive et son équation différentielle du premier ordre. On obtiendrait ainsi deux équations différentielles du premier ordre différentes

l'une de l'autre, dont chacune ne contiendrait qu'une constante arbitraire. Si l'on différentie ensuite chacune de ces équations, et si l'on élimine la constante qu'elle contient au moyen de la différentielle que l'on aura obtenue, elles conduiront toutes deux à la même équation du second ordre, qui ne différera point de celles que l'on aura trouvée par le premier procédé.

En effet, l'équation primitive $F(x, y, a, b,)=0$ doit être considérée comme représentant un double système de courbes ; savoir les courbes que l'on trouverait en faisant varier a, b demeurant constante, et les courbes que l'on trouverait en faisant varier b, a demeurant constante. Chacune des équations dérivées du premier ordre dans laquelle une des constantes a disparu, répond séparément à l'un de ces systèmes. Quant à l'équation unique du second ordre, où aucune des deux constantes ne se trouve, elle appartient également aux deux systèmes de courbes, et exprime une propriété qui leur est commune.

425. Soit par exemple l'équation primitive

$$y^2+ay+bx=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

qui appartient à une parabole ayant son axe parallèle à l'axe des x, et passant par l'origine des coordonnées. En faisant varier a, b demeurant constante, on changera à la fois la position du grand axe et le paramètre, et en faisant varier b, a demeurant la constante, on changera seulement le paramètre. L'équation différentielle du premier ordre est $\left(\text{en écrivant pour abréger } y'\right.$ et y'' au lieu de $\frac{dy}{dx}$ et $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

$$2yy'+ay'+b=0\,;\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

et en éliminant successivement a et b entre cette équation et l'équation primitive, on obtient les deux équations du premier ordre

$$y^2y'+b(y-xy')=0\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
$$y^2-2xyy'+a(y-xy')=0\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

qui appartiennent respectivement aux deux systèmes de paraboles dont on vient de parler.

En différentiant l'équation (3) on a

$$2yy'^2+y^2y''-bxy''=0\,;$$

et en éliminant b entre cette équation et l'équation (3), il vient pour l'équation du second ordre

$$y^2y''+2yy'^2-2xy'^3=0\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

En différentiant l'équation (4), on a

$$2y'^2+2yy''+ay''=0\,;$$

et en éliminant a entre cette équation et l'équation (4), on retrouve l'équation du second ordre (5).

L'équation primitive et ses deux différentielles sont

$$y^2+ay+bx=0\,,$$
$$2yy'+ay'+b=0\,,$$
$$2y'^2+2yy''+ay''=0.$$

Et en éliminant à la fois a et b entre ces trois équations, on retrouve également l'équation du second ordre (5). Cette équation, dans laquelle les deux constantes a et b ont disparu, exprime une relation qui subsiste pour l'une quelconque des courbes paraboliques que peut re-

présenter l'équation (1), quand on y donne à ces constantes toutes les valeurs possibles.

Les équations (3) et (4), contenant chacune une constante arbitraire, sont les deux intégrales du premier ordre, ou *intégrales premières* de l'équation (5). L'équation (1) contenant deux constantes arbitraires est *l'intégrale seconde* de cette même équation. Si l'on élimine y' entre les deux équations (3) et (4), on retrouve l'équation (1).

426. En général, si l'on obtient par un moyen quelconque, deux équations différentielles du premier ordre satisfaisant à une équation différentielle du second ordre proposée, et contenant chacune une constante qui n'entre pas dans cette dernière équation ; on obtiendra, par l'élimination de y' ou $\frac{dy}{dx}$ entre les deux équations dont il s'agit, une équation primitive contenant deux constantes arbitraires, qui satisfera nécessairement à l'équation proposée, et en sera l'intégrale générale.

427. Les notions qui viennent d'être exposées s'appliquent évidemment aux équations différentielles d'un ordre quelconque. Une équation différentielle de l'ordre n a toujours n intégrales de l'ordre immédiatement inférieur, qui contiennent chacune une constante arbitraire différente. Toutes ces constantes doivent se retrouver dans l'intégrale générale, si l'on veut que cette équation ait la même généralité que l'équation différentielle proposée. En effet, une équation primitive et ses différentielles successives jusqu'à l'ordre n donnent $n+1$, équations au moyen desquelles n constantes arbitraires peuvent êtres éliminées. Si l'on connaissait les n inté-

grales premières de l'équation proposée, on pourrait en déduire l'intégrale n^e, ou l'équation primitive, en éliminant entre ces n^e intégrales les $n-1$ coefficients différentiels, $y', y'', y''' \ldots\ldots y^{(n-1)}$.

Ces notions paraîtront encore plus évidentes en considérant la formule de Taylor,

$$y = y_0 + x\frac{dy_0}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y_0}{dx^2} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y_0}{dx^3} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^4y_0}{dx^4} + \text{etc.},$$

qui donne le développement de la fonction y en série ordonnée suivant les puissances entières de la variable x, au moyen des valeurs de cette fonction et de ses coefficients différentiels qui correspondent à $x=0$. Soit une équation différentielle de l'ordre n,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

dont nous supposons ici que dépend la fonction y. On déduira de cette équation différentielle l'expression de $\frac{d^ny}{dx^n}$ en fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; et par suite les expressions des coefficients différentiels des ordres plus élevés. Ainsi les valeurs de $\frac{d^ny_0}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y_0}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2}y_0}{dx^{n+2}}$, etc., seront connues en fonction des valeurs de $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \frac{d^3y_0}{dx^3}, \ldots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$. Si l'on substitue donc ces valeurs dans l'expression générale de y, on obtiendra une relation entre x et y qui sera le développement en série infinie de l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée; et dans laquelle ces dernières quantités, qui sont en nombre n, demeureront entièrement arbitraires.

428. Remarquons de plus que la formule de Taylor donne, en y faisant $h = -x$,

$$y_0 = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} - \text{etc.},$$

et que si on l'applique aux fonctions $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., on aura également

$$\frac{dy_0}{dx} = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^5y}{dx^5} - \text{etc.},$$

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^2}{2}\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^5y}{dx^5} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^6y}{dx^6} - \text{etc.},$$

$$\frac{d^3y_0}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3} - x\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{x^2}{2}\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^6y}{dx^6} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^7y}{dx^7} - \text{etc.},$$

etc.

Or, l'équation différentielle proposée étant de l'ordre n, donnera $\frac{d^ny}{dx^n}$ et tous les coefficients différentiels des ordres plus élevés en fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. En substituant leurs valeurs dans les n premières de ces équations, on aura donc, conformément à ce qui a été dit ci-dessus, n équations différentielles de l'ordre $n-1$ contenant chacune une constante arbitraire différente $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$.

Intégration des équations différentielles le plus simples du second ordre et des ordres supérieurs.

429. Cette intégration ne peut être effectuée que dans un petit nombre de cas particuliers. Soit en premier lieu l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=X,$$

X désignant une fonction de x seule. Multipliant les deux membres par le facteur constant dx, et intégrant, il viendra

$$d.\frac{dy}{dx}=Xdx, \qquad \frac{dy}{dx}=A+\int Xdx.$$

Multipliant une seconde fois par dx, et intégrant de nouveau on aura

$$dy=Adx+dx\int Xdx, \qquad \text{et} \qquad y=B+Ax+\int dx\int Xdx,$$

pour l'intégrale demandée, dans laquelle A et B sont les deux constantes arbitraires.

En intégrant par partie $\int dx \int Xdx$, l'expression précédente de y pourra s'écrire

$$y=B+Ax+x\int Xdx-\int Xxdx.$$

Si l'équation proposée était

$$\frac{d^3y}{dx^3}=X,$$

on trouverait de la même manière

$$y=C+Bx+\frac{Ax^2}{2}+\int dx\int dx\int Xdx,$$

ou, si l'on veut

$$y=C+Bx+\frac{Ax^2}{2}+\frac{x^2}{2}\int Xdx-x\int Xxdx+\frac{1}{2}\int Xx^2dx,$$

A,B,C étant les trois constantes arbitraires, et ainsi de suite. Il est facile de reconnaître la loi de ces expressions.

430. Soit maintenant l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{P},$$

dans laquelle P désigne une fonction du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ seulement, que nous désignerons pour abréger par y'. Cette équation peut s'écrire

$$\frac{dy'}{dx}=\mathrm{P};$$

et l'on en tire d'abord

$$dx=\frac{dy'}{\mathrm{P}}, \qquad \text{et} \qquad x=\mathrm{A}+\int\frac{dy'}{\mathrm{P}}.$$

On a de plus

$$dy=y'dx=\frac{y'dy'}{\mathrm{P}}, \qquad \text{et} \qquad y=\mathrm{B}+\int\frac{y'dy'}{\mathrm{P}}.$$

Eliminant y' entre ces deux équations, après avoir effectué les intégrations indiquées, on aura une équation entre x et y, qui sera l'intégrale cherchée, et dans laquelle A et B seront les deux constantes arbitraires.

On peut remarquer que si la fonction P de l'équation precédente contenait x avec y', la recherche se réduirait à intégrer l'équation $\mathrm{P}dx-dy'=0$ entre les deux variables x et y'; et que si la fonction P contenait y avec y', il s'agirait seulement d'intégrer l'équation $\mathrm{P}dy-y'dy'=0$ entre les deux variables y et y'.

431. Si l'on avait l'équation du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3}=Q,$$

Q désignant une fonction du coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$, ou y'' seulement, on écrirait de même

$$\frac{dy''}{dx}=Q;$$

d'où

$$dx=\frac{dy''}{Q}, \qquad \text{et} \qquad x=A+\int\frac{dy''}{Q}.$$

On aurait ensuite

$$dy'=y''dx=\frac{y''dy''}{Q}, \qquad \text{et} \qquad y'=B+\int\frac{y''dy''}{Q};$$

puis

$$dy=y'dx=Bdx+\frac{dy''}{Q}\int\frac{y''dy''}{Q}, \text{ et } y=C+Bx+\int\frac{dy''}{Q}\int\frac{y''dy''}{Q}.$$

L'élimination de y'' entre cette équation et l'équation $x=A+\int\frac{dy''}{Q}$ donnera l'intégrale demandée, A,B,C étant les trois constantes arbitraires.

On continuerait de la même manière pour les équations analogues des ordres plus élevés.

432. Soit encore l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Y,$$

dans laquelle Y désigne une fonction de y seule. Multipliant par dy et intégrant, il viendra

$$\frac{dyd^2y}{dx^2}=Ydy, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=A+2\int Ydy;$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{A+2\int Y dy}}, \qquad \text{et} \qquad x = B + \int \frac{dy}{\sqrt{A+2\int Y dy}},$$

pour l'intégrale demandée, dans laquelle A et B sont les deux constantes arbitraires.

433. Si l'équation proposée était

$$\frac{d^3y}{dx^3} = P,$$

P désignant une fonction de $\frac{dy}{dx}$ ou y' seulement, on remarquerait que cette équation peut s'écrire

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = P,$$

et que l'on en tirera comme ci-dessus

$$dx = \frac{dy'}{\sqrt{A+2\int P dy'}}, \quad \text{et} \quad x = B + \int \frac{dy'}{\sqrt{A+2\int P dy'}}$$

Mais l'on a de plus

$$dy = y' dx = \frac{y' dy'}{\sqrt{A+2\int P dy'}}, \text{ d'où } y = C + \int \frac{y' dy'}{\sqrt{A+2\int P dy'}}.$$

En éliminant y' entre ces deux équations, on trouvera l'intégrale demandée, contenant les trois constantes arbitraires A, B, C.

434. Ce procédé s'étend facilement aux équations des ordres plus élevés, dans lesquelles le coefficient différentiel est donné en fonction seulement du coefficient différentiel de l'ordre inférieur de deux unités. Soit l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} = Q,$$

Q étant fonction de $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou y'' seulement. Cette équation revient à

$$\frac{d^2y''}{dx^2}=Q,$$

d'où l'on tire comme ci-dessus

$$dx=\frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}},\qquad x=B+\int\frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}.$$

L'on a ensuite

$$dy'=y''dx=\frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}},\qquad y'=C+\int\frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}.$$

Puis

$$dy=y'dx=Cdx+\frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}\int\frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}},$$

$$y=D+Cx+\int\frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}\int\frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}.$$

L'élimination de y'' entre ces deux équations donnera l'intégrale cherchée. On remarquera que quand même cette élimination ne pourrait être effectuée, ces équations donneraient néanmoins deux valeurs correspondantes de x et y, en fixant arbitrairement une valeur de y''.

435. Soit par exemple l'équation très-simple

$$\frac{d^2y}{dx^2}=ky,$$

k désignant un nombre positif. L'intégrale sera, d'après le n° 432,

$$x=B+\int\frac{dy}{\sqrt{A+ky^2}}=B+\frac{1}{\sqrt{k}}.\,l\left(y\sqrt{k}+\sqrt{A+ky^2}\right).$$

d'où l'on déduit facilement (en changeant de constantes)

$$y = Ae^{-x\sqrt{k}} + Be^{x\sqrt{k}}.$$

Mais si l'on avait

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ky,$$

il viendrait

$$x = B + \int \frac{dy}{\sqrt{A - ky^2}} = B + \frac{1}{\sqrt{k}} \text{arc sin.} y\sqrt{\frac{k}{A}};$$

d'où l'on tire

$$y = \sqrt{\frac{A}{k}} \sin. \sqrt{k}(x - B),$$

ou, ce qui revient au même (en changeant de constantes),

$$y = A\sin. x\sqrt{k} + B\cos. x\sqrt{k}.$$

Ces deux intégrales peuvent évidemment se déduire l'une de l'autre, en ayant égard aux relations des exponentielles imaginaires avec les fonctions trigonométriques.

Des facteurs propres à rendre intégrable une équation différentielle d'un ordre quelconque.

436. Lorsqu'une équation d'un ordre quelconque a été mise sous la forme

$$\frac{d^ny}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

(ce qui doit toujours être censé possible, puisque, quelle que soit l'équation de l'ordre $n-1$ dont celle-ci dérive, on peut, en mettant seule dans un membre la constante qu'il s'agit de faire disparaître, obtenir immédiatement par la différentiation une équation de l'ordre n dans laquelle le coefficient différentiel de l'ordre le plus

élevé n'entre qu'à la première puissance), il existe toujours une infinité de facteurs tels, que le premier membre de cette équation étant multiplié par l'un quelconque d'entre eux, deviendra nécessairement une différentielle exacte des quantités variables $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.

Soit, par exemple, l'équation du second ordre

$$y''+f(x,y,y')=0,$$

où nous écrivons pour abréger y' et y'' au lieu de $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$; et représentons par

$$F(x,y,y',a)=0,$$

l'équation du premier ordre dont elle dérive, a étant la constante que l'on a fait disparaître. L'équation proposée sera donc le résultat de l'élimination de a entre l'équation $F=0$ et celle qui en dérive immédiatement par la différentiation, qui est

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dy'}y''=0.$$

Donc mettant celle-ci sous la forme

$$y''+\frac{\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'}{\frac{dF}{dy'}}=0,$$

et admettant que a y soit remplacé par sa valeur en x, y, y', tirée de l'équation $F=0$, elle sera identique avec l'équation proposée; d'où l'on conclut que l'on a identiquement

$$[y''+f(x,y,y')]\frac{dF}{dy'}=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dy'}y'':$$

et comme le second membre est une fonction dérivée complète, il en doit être de même du premier. Ainsi l'équation proposée devient immédiatement intégrable lorsqu'on la multiplie par $\frac{dF}{dy'}$, en remplaçant a dans ce facteur par sa valeur tirée de l'équation $F=0$.

Remarquons de plus qu'en regardant a comme variable dans l'équation $F=0$, elle donne par la différentiation

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dy'}y''+\frac{dF}{da}a'=0,\ \text{d'où}\ -a'=\frac{\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dy'}y''}{\frac{dF}{da}};$$

en écrivant a' au lieu de $\frac{da}{dx}$. On a donc par ce qui précède

$$[y''+f(x,y,y')]\frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}=-a';$$

ce qui montre qu'en multipliant l'équation proposée par le facteur $\frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}$, le premier membre devient une différentielle exacte dont l'intégrale est $-a$, la valeur de a étant donnée par l'équation $F=0$.

D'ailleurs l'équation proposée deviendra également une différentielle exacte si on la multiplie par $\frac{\varphi(a).\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}$, $\varphi(a)$ désignant une fonction quelconque de a; puisqu'elle sera alors identique avec la quantité

$-\varphi(a).\,a'$. Représentant par $\Phi(a)$ la fonction dont $-\varphi(a).a$ est la fonction dérivée, l'intégrale de l'équation proposée sera donc $\Phi(a) = const.$, ce qui donne $a = const.$ Et comme on doit remplacer a par sa valeur tirée de l'équation $F=0$, on voit que l'équation $a = const.$, ne diffère point de l'équation $F=0$ dans laquelle a est regardée comme une constante arbitraire.

437. On a vu ci-dessus, qu'une équation du second ordre avait toujours deux équations primitives ou deux intégrales du premier ordre, contenant chacune une constante arbitraire différente. Il résulte de ce qui précède que chacune de ces équations donnerait des facteurs différents, également propres à rendre le premier membre de cette équation du second ordre une différentielle exacte. De plus, tous ces facteurs peuvent être compris comme il suit dans une formule générale. Soient

$$F(x,y,y',a)=0, \quad \text{et} \quad F_1(x,y,y',b)=0,$$

les deux équations primitives du premier ordre de l'équation proposée, a et b étant les deux constantes arbitraires. On aura donc, d'après ce qu'on a vu plus haut

$$[y''+f(x,y,y')]\frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}} = -a',$$

$$[y''+f(x,y,y')]\frac{\frac{dF_1}{dy'}}{\frac{dF_1}{db}} = -b'.$$

Soit maintenant $\Phi(a,b)$ une fonction quelconque de a,b.

Multipliant respectivement les deux équations précédentes par $\frac{d\Phi}{da}, \frac{d\Phi}{db}$, et ajoutant, il viendra

$$[y''+f(x,y,y')]\left(\frac{\frac{d\Phi}{da}\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}+\frac{\frac{d\Phi}{db}\frac{dF_{,}}{dy'}}{\frac{dF_{,}}{db}}\right)=-\left(\frac{d\Phi}{da}a'+\frac{d\Phi}{db}b'\right);$$

et comme le second membre est la fonction dérivée complète de $-\Phi(a,b)$, il s'ensuit que l'équation proposée étant multipliée par le facteur $\frac{\frac{d\Phi}{da}\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}+\frac{\frac{d\Phi}{db}\frac{dF_{,}}{dy'}}{\frac{dF_{,}}{db}}$, devient une fonction dérivée complète, dont la fonction primitive est $-\Phi(a,b)=const.$

Comme on peut prendre une autre fonction quelconque $\Psi(a,b)$, qui conduirait à l'intégrale $-\Psi(a,b)const.$, on en conclut $a=const.$ et $b=const.$ pour les deux intégrales de l'équation proposée, a et b étant déterminées respectivement, par les équations $F=0$ et $F_{,}=0$.

Les notions précédentes s'étendent facilement aux équations différentielles d'un ordre quelconque.

Intégration des équations linéaires à deux variables d'un ordre quelconque.

438. On nomme linéaires les équations dans lesquelles la fonction y et ses coefficients différentiels n'entrènt qu'à la première puissance. Elles sont généralement de la forme

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+Uy=V,\ldots\ldots \quad (1)$$

P,Q,.....U,V représentant des fonctions quelconques de la variable indépendante x.

Nous considérerons en premier lieu l'équation

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+Uy=0,\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dans laquelle les coefficients P,Q,......U seraient des quantités constantes, c'est-à-dire indépendantes de x et y. Il s'agit d'intégrer cette équation, c'est-à-dire de trouver une expression de y en fonction de x qui y satisfasse, et qui contienne n constantes arbitraires de plus que n'en renferme l'équation différentielle proposée.

Si nous supposions $y=e^{px}$, nous aurions en général $\frac{d^ny}{dx^n}=p^ne_p{}^x$; et en substituant cette valeur dans l'équation proposée, il viendrait

$$p^n+Pp^{n-1}+Qp^{n-2}+\ldots\ldots+U=0\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Par conséquent, si l'on prend pour p une des racines de l'équation (3), la valeur $y=e^{px}$ satisfera à l'équation (2); ce sera une valeur particulière de la fonction y. Et comme l'équation (3) aura en général n racines différentes, que nous désignerons par $p', p'', p''',\ldots\ldots p^{(n)}$, nous aurons de cette manière n valeurs particulières de la forme e^{px}, qui toutes satisferont à l'équation (2).

En multipliant chacune de ces valeurs par un coefficient constant, elles ne cesseront pas de satisfaire à l'équation (2). De plus cette équation sera également satisfaite par la somme de deux ou d'un plus grand nombre des valeurs dont il s'agit. Il résulte de là qu'au

moyen des n valeurs particulières correspondantes aux racines p', p'', p''',..... $p^{(n)}$, on peut former l'expression

$$y = A'e^{p'x} + A''e^{p''x} + A'''e^{p'''x} + \ldots\ldots + A^{(n)}e^{p^{(n)}x},$$

qui satisfait à l'équation différentielle proposée, et qui, contenant les n constantes arbitraires A', A'', A''',..... $A^{(n)}$, en est nécessairement l'intégrale générale.

439. Si l'équation (3) avait des racines imaginaires, la méthode précédente s'appliquerait également, les exponentielles imaginaires pouvant être remplacées par des sinus et cosinus d'arcs réels. Soit en effet $\alpha + 6\sqrt{-1}$ et $\alpha - 6\sqrt{-1}$ deux racines imaginaires de l'équation (3). Les valeurs particulières correspondantes seront

$$A'e^{x(\alpha + 6\sqrt{-1})} + A''e^{x(\alpha - 6\sqrt{-1})},$$

ou

$$e^{\alpha x}(A'e^{6x\sqrt{-1}} + A''e^{-6x\sqrt{-1}}),$$

ou

$$e^{\alpha x}(A' + A'')\cos.6x + (A' - A'')\sqrt{-1}.\sin.6x,$$

ou, en écrivant B' et B'' à la place de $A' + A''$ et $(A' - A'')\sqrt{-1}$,

$$e^{\alpha x}(B'\cos.6x + B''\sin.6x),$$

B' et B'' représentant de nouvelles constantes arbitraires.

440. Si l'équation (3) a deux ou plusieurs racines égales, la méthode dont il s'agit paraît en défaut. L'intégrale prend alors une forme particulière que l'on peut trouver de la manière suivante. Supposons d'abord que

les premières racines p' et p'' diffèrent très-peu l'une de l'autre, en sorte que l'on puisse écrire $p''=p'+\omega$, ω étant une quantité très-petite. La somme des deux valeurs particulières correspondantes sera donc

$$A'e^{p'x}+A''e^{(p'+\omega)x}=e^{p'x}(A'+A''e^{\omega x}),$$

ou en développant l'exponentielle $e^{\omega x}$,

$$e^{p'x}\left(A'+A''+A''\omega x+A''\frac{\omega^2x^2}{2}+\text{etc.}\right).$$

Si maintenant on suppose que ω devienne infiniment petite, rien n'empêche de prendre les valeurs de A' et A'' telles que $A''\omega$ conserve une valeur finie et arbitraire, ce qui suppose A'' infiniment grande, et que $A'+A''$ conserve également une valeur finie et arbitraire, ce qui suppose A' aussi infiniment grande, et de signe contraire à A''. Quant aux termes contenant les puissances supérieures de ω, ils devront être négligés. La somme des deux valeurs particulières dont il s'agit deviendra donc dans le cas de deux racines égales à p',

$$e^{p'x}(B'+B''x),$$

B' et B'' désignant deux constantes arbitraires.

Le même raisonnement s'appliquerait au cas où les trois racines p', p'', p''' seraient égales entre elles. Supposant $p'''=p'+\omega$, nous aurions donc pour la somme des trois valeurs particulières correspondantes

$$e^{p'x}(A'+A''x)+A'''e^{(p'+\omega)x},$$

c'est-à-dire

$$e^{p'x}\left(A'+A''x+A'''+A'''\omega x+A'''\frac{\omega^2x^2}{2}+A'''\frac{\omega^3x^3}{2.3}+\text{etc.}\right).$$

Admettons maintenant que ω devienne infiniment petite. Nous pourrons néanmoins prendre A', A'', A''' telles que les quantités A'+A''', A''+A'''ω, $\frac{A'''\omega^2}{2}$ conservent des valeurs finies et arbitraires. Supprimant d'ailleurs le terme contenant ω^3 et les termes suivants, il restera pour la somme des trois valeurs particulières dont il s'agit.

$$e^{p'x}(B'+B''x+B'''x^2).$$

On procéderait de la même manière dans le cas où il y aurait un plus grand nombre de racines égales ; et l'on voit qu'en général l'existence d'un nombre r de racines égales à p' dans l'équation (2) donne lieu à autant de valeurs particulières dont la somme est exprimée par

$$e^{p'x}(B'+B''x+B'''x^2+........+B^{(r)}x^{r-1}).$$

441. Revenons maintenant à l'équation (1) dans laquelle les quantités P, Q,..... U, V sont en général des fonctions quelconques de x. On remarquera d'abord que si le terme V était nul, c'est-à-dire si l'on avait simplement

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+........+Uy=0,........ \quad (4)$$

cette équation aurait, comme l'équation (2), la propriété d'être satisfaite par la somme de plusieurs valeurs particulières multipliées chacune par une constante, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître. Il suffirait donc alors de connaître un nombre n de valeurs particulières pour avoir immédiatement l'intégrale générale demandée.

442. Lorsque le dernier terme V subsiste dans l'é-

quation (1), elle ne présente plus la même propriété. Néanmoins l'intégrale générale peut être obtenue au moyen de la méthode suivante lorsqu'on connaît n valeurs particulières qui satisfont à l'équation (4).

Soient $Y', Y'', Y''', \ldots\ldots Y^{(n)}$ les n valeurs particulières dont il s'agit. Nous en formerons l'expression générale

$$y = A'Y' + A''Y'' + A'''Y''' + \ldots\ldots\ldots + A^{(n)}Y^{(n)},$$

dans laquelle $A', A'', A''', \ldots\ldots A^{(n)}$ désignent maintenant des fonctions indéterminées de x. En prenant les différentielles successives de cette expression, on aura d'abord

$$\frac{dy}{dx} = A'\frac{dY'}{dx} + A''\frac{dY''}{dx} + A'''\frac{dY'''}{dx} + \ldots\ldots + A^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}$$
$$+ \frac{dA'}{dx}Y' + \frac{dA''}{dx}Y'' + \frac{dA'''}{dx}Y''' + \ldots\ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx}Y^{(n)},$$

et nous égalerons la seconde ligne à zéro, en regardant les fonctions $A', A'', A''', \ldots\ldots A^{(n)}$ comme assujetties à satisfaire à cette équation. Il viendra alors

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A'\frac{d^2Y'}{dx^2} + A''\frac{d^2Y''}{dx^2} + A'''\frac{d^2Y'''}{dx^2} + \ldots\ldots + A^{(n)}\frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2}$$
$$+ \frac{dA'}{dx}\frac{dY'}{dx} + \frac{dA''}{dx}\frac{dY''}{dx} + \frac{dA'''}{dx}\frac{dY'''}{dx} + \ldots\ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

Egalant de même la seconde ligne à zéro, il viendra

$$\frac{d^3y}{dx^3} = A'\frac{d^3Y'}{dx^3} + A''\frac{d^3Y''}{dx^3} + A'''\frac{d^3Y'''}{dx^3} + \ldots\ldots + A^{(n)}\frac{d^3Y^{(n)}}{dx^3}$$
$$+ \frac{dA'}{dx}\frac{d^2Y'}{dx^2} + \frac{dA''}{dx}\frac{d^2Y''}{dx^2} + \frac{dA'''}{dx}\frac{d^2Y'''}{dx^2} + \ldots\ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2},$$

où nous égalerons la seconde ligne à zéro ; et ainsi de suite. Nous parviendrons de cette manière à

$$\frac{d^n y}{dx^n}=A'\frac{d^n Y'}{dx^n}+A''\frac{d^n Y''}{dx^n}+A'''\frac{d^n Y'''}{dx^n}+\ldots\ldots+A^{(n)}\frac{d^n Y^{(n)}}{dx^n}$$
$$+\frac{dA'}{dx}\frac{d^{n-1}Y'}{dx^{n-1}}+\frac{dA''}{dx}\frac{d^{n-1}Y''}{dx^{n-1}}+\frac{dA'''}{dx}\frac{d^{n-1}Y'''}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^{n-1}Y^{(n)}}{dx^{n-1}},$$

et nous égalerons la seconde ligne à V.

Cela étant posé, il est visible que les valeurs $y=Y'$, $y=Y''$, $y=Y'''$,..... $y=Y^{(n)}$ satisfaisant séparément à l'équation (4), l'expression générale suivante $y=A'Y'+A''Y''+A'''Y'''+\ldots\ldots+A^{(n)}Y^{(n)}$ satisfera également à l'équation (1), pourvu que l'on regarde les fonctions $A', A'', A''', \ldots\ldots A^{(n)}$ comme assujetties à vérifier les n équations

$$\frac{dA'}{dx}Y'+\frac{dA''}{dx}Y''+\frac{dA'''}{dx}Y'''+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}Y^{(n)}=0,$$
$$\frac{dA'}{dx}\frac{dY'}{dx}+\frac{dA''}{dx}\frac{dY''}{dx}+\frac{dA'''}{dx}\frac{dY'''}{dx}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}=0,$$
$$\frac{dA'}{dx}\frac{d^2Y'}{dx^2}+\frac{dA''}{dx}\frac{d^2Y''}{dx^2}+\frac{dA'''}{dx}\frac{d^2Y'''}{dx^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dA'}{dx}\frac{d^{n-1}Y'}{dx^{n-1}}+\frac{dA''}{dx}\frac{d^{n-1}Y''}{dx^{n-1}}+\frac{dA'''}{dx}\frac{d^{n-1}Y'''}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^{n-1}Y^{(n)}}{dx^{n-1}}=V.$$

Or, ces équations étant linéaires donneront toujours pour les fonctions $\frac{dA'}{dx}, \frac{dA''}{dx}, \frac{dA'''}{dx}, \ldots\ldots \frac{dA^{(n)}}{dx}$, des valeurs déterminées que nous représenterons par $\Phi', \Phi'', \Phi''', \ldots \Phi^{(n)}$. L'expression de l'intégrale générale cherchée sera donc

$$y=Y'(a'+\int dx.\Phi')+Y''(a''+\int dx.\Phi'')+\ldots+Y^{(n)}(a^{(n)}+\int dx.\Phi^{(n)}),$$

et contiendra les n constantes arbitraires $a', a'', \ldots. a^{(n)}$.

443. Si l'on ne connaissait qu'un nombre de valeurs particulières moindre que le nombre n qui exprime l'ordre de l'équation différentielle proposée, la méthode précédente ne pourrait pas être appliquée de la même manière. Les fonctions $\frac{dA'}{dx}, \frac{dA''}{dx}, \frac{dA'''}{dx}$, etc., n'étant plus en assez grand nombre pour que l'on pût poser toutes les équations nécessaires pour faire disparaître les secondes lignes des expressions des différentielles $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., on serait obligé de laisser subsister dans ces expressions les différentielles supérieures de quelques-unes des fonctions indéterminées A', A'', A''', etc. La recherche des valeurs de ces fonctions exigerait donc l'intégration d'une ou de plusieurs équations différentielles. Si le nombre des valeurs particulières connues est $n-1$, l'intégration générale peut toujours être obtenue, parce que la détermination des fonctions A', A'', A'''; etc., n'exige alors que l'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, intégration qui peut toujours être effectuée conformément au n° 387.

444. Dans le cas particulier où les coefficients P, Q, ... U de l'équation (1) sont des nombres constants, le dernier terme V seul étant une fonction de x, les valeurs particulières $Y', Y'', Y''', \ldots Y^{(n)}$ sont connues, conformément à ce qu'on a vu n° 438, puisqu'elles sont exprimées par $e^{p'x}, e^{p''x}, e^{p'''x}, \ldots e^{p^{(n)}x}$, en désignant par $p', p'', p''', \ldots p^{(n)}$ les racines de l'équation (3). La méthode précédente donne donc facilement l'expression de l'intégrale cherchée.

445. Soit, par exemple, l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\mathrm{P}\frac{dy}{dx}+\mathrm{Q}y=\mathrm{V}.$$

Désignant par p' et p'' les racines de l'équation

$$p^2+\mathrm{P}p+\mathrm{Q}=0\,;$$

l'expression générale de y sera

$$y=\mathrm{A}'e^{p'x}+\mathrm{A}''e^{p''x},$$

et les fonctions A′ et A″ seront assujetties à satisfaire aux équations

$$\frac{d\mathrm{A}'}{dx}e^{p'x}+\frac{d\mathrm{A}''}{dx}e^{p''x}=0,$$

$$\frac{d\mathrm{A}'}{dx}p'e^{p'x}+\frac{d\mathrm{A}''}{dx}p''e^{p''x}=\mathrm{V}.$$

On en déduit par l'élimination

$$\frac{d\mathrm{A}'}{dx}=\frac{\mathrm{V}.e^{-p'x}}{p''-p'},\qquad \text{d'où}\quad \mathrm{A}'=\frac{a'+\int dx.\mathrm{V}e^{-p'x}}{p''-p'},$$

$$\frac{d\mathrm{A}''}{dx}=\frac{\mathrm{V}.e^{-p''x}}{p'-p''},\qquad \text{d'où}\quad \mathrm{A}''=\frac{a''+\int dx.\mathrm{V}e^{-p''x}}{p'-p''},$$

a' et a'' étant les deux constantes arbitraires. L'intégrale demandée est donc

$$y=\frac{(a'+\int dx.\mathrm{V}e^{-p'x})e^{p'x}-(a''+\int dx.\mathrm{V}e^{-p''x})e^{p''x}}{p'-p''}.$$

446. Si les racines de l'équation $p^2+\mathrm{P}p+\mathrm{Q}=0$ étaient imaginaires et désignées par $\alpha\pm6\sqrt{-1}$, on prendrait d'après le n° 439, pour l'expression générale de y,

$$y=\mathrm{A}'e^{\alpha x}\cos.6x+\mathrm{A}''e^{\alpha x}\sin.6x.$$

Les fonctions A', A'' seraient assujetties à satisfaire aux équations

$$\frac{dA'}{dx} e^{\alpha x} \cos.\beta x + \frac{dA''}{dx} e^{\alpha x} \sin.\beta x = 0,$$

$$\frac{dA'}{dx} (\alpha e^{\alpha x} \cos.\beta x - \beta e^{\alpha x} \sin.\beta x) + \frac{dA''}{dx} (\alpha e^{\alpha x} \sin.\beta x + \beta e^{\alpha x} \cos.\beta x) = V,$$

d'où l'on déduit par l'élimination

$$\frac{dA'}{dx} = -\frac{Ve^{-\alpha x} \sin.\beta x}{\beta}, \quad \text{et} \quad A' = \frac{a' - \int dx.Ve^{-\alpha x} \sin.\beta x}{\beta},$$

$$\frac{dA''}{dx} = \frac{Ve^{-\alpha x} \cos.\beta x}{\beta}, \quad \text{et} \quad A'' = \frac{a'' + \int dx.Ve^{-\alpha x} \cos.\beta x}{\beta}.$$

L'expression de l'intégrale générale est donc ici

$$y = e^{\alpha x} \frac{(a' - \int dx.Ve^{-\alpha x} \sin.\beta x)\cos.\beta x + (a'' + \int dx.Ve^{-\alpha x} \cos.\beta x) \sin.\beta x}{\beta}$$

447. Si les racines de l'équation $p^2 + Pp + Q = 0$ étaient égales entre elles, l'expression de y du n° 445, se réduirait à $\frac{0}{0}$. On en trouverait la véritable valeur en différentiant le numérateur et le dénominateur par rapport à p'', puis faisant $p'' = p'$, ce qui donne

$$y = -(\int dx.xVe^{-p'x}) e^{p'x} + (a'' + \int dx.Ve^{-p'x}) xe^{p'x}.$$

Comme les limites inférieures des intégrales demeurent arbitraires, on peut rétablir dans le premier terme la constante a', et écrire

$$y = (a' - \int dx.xVe^{-p'x}) e^{p'x} + (a'' + \int dx.Ve^{-p'x}) xe^{p'x}.$$

Cette formule, dans le cas où $V=0$, se réduit à

$$y = (a' + a''x) e^{p'x},$$

comme cela doit être d'après le n° 424.

448. L'intégration des équations linéaires du second ordre, donne immédiatement la loi des températures permanentes d'une barre ou d'un anneau dont la section transversale est uniforme et fort petite.

Concevons une barre cylindrique ou prismatique d'une longueur infinie dont une extrémité placée dans un foyer de chaleur est maintenue constamment à la température U. Cette barre est placée dans l'air à la température 0. La chaleur communiquée par le foyer se propage dans la barre, l'échauffe progressivement, et se dissipe en partie dans le milieu environnant. Après un temps suffisant, il s'établira dans toute l'étendue du prisme des températures constantes dont il s'agit de connaître la loi, et qui sont évidemment déterminées par cette condition, que chaque partie reçoive du foyer par une de ses extrémités, une quantité de chaleur égale à celle qu'elle transmet aux parties suivantes et qu'elles perdent par leur surface extérieure.

Les dimensions transversales de la barre étant supposées très-petites, on peut regarder comme égales les températures de tous les points d'une même section. Nous désignerons par

Ω l'aire de la section transversale de la barre;

γ le périmètre de cette section;

x la distance au foyer d'une section quelconque de la barre;

v la température qui a lieu dans cette section;

K, h les conducibilités intérieure et extérieure de la substance de la barre.

Considérons l'élément de la longueur de la barre com-

pris entre les sections placées aux distances x et $x+dx$. La surface de cet élément étant γdx, la quantité de la chaleur perdue par sa surface extérieure dans l'unité de temps, est $h\gamma dx v$; et, par conséquent, la portion de chaleur perdue dans le même temps, par la partie de la barre qui est à la suite, est exprimée par l'intégrale $h\gamma \int_x^\infty dx v$. Mais d'une autre part, la température de tous les points d'une même section étant supposée la même, la chaleur traverse l'élément dont il s'agit, de la même manière que cela aurait lieu pour un solide infini compris entre deux plans parallèles. L'épaisseur du solide est ici dx, et les températures extrêmes sont v et $v+dv$. La quantité de chaleur qui le traverse dans l'unité de temps est donc $-K\Omega \frac{dv}{dx}$. Ainsi nous avons pour exprimer la condition énoncée, l'équation

$$-K\Omega \frac{dv}{dx} = h\gamma \int_x^\infty dx . v,$$

qui donne en différentiant

$$K\Omega \frac{d^2 v}{d^2 x} = h\gamma . v.$$

On parvient également à cette équation en remarquant que $-K\Omega \frac{dv}{dx}$ représentant la quantité de chaleur qui traverse dans l'unité de temps la section de la barre placée à la distance x du foyer, on aura $-K\Omega \left(\frac{dv}{dx} + d. \frac{dv}{dx}\right)$ pour représenter la quantité de chaleur qui traverse dans le même temps la section placée

à la distance $x+dx$. Or, la différence de ces deux quantités, qui est $K\Omega \frac{d^2v}{dx^2} dx$, doit nécessairement être égale à la quantité de chaleur $h\gamma dx.v$ qui se dissipe par la partie de la surface correspondante à l'intervalle dx. On a donc comme ci-dessus

$$K\Omega \frac{d^2v}{dx^2} dx = h\gamma dx.v, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{h\gamma}{K\Omega} v.$$

449. L'intégrale complète de cette équation différentielle est, conformément au n° 445,

$$v = A.e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}} + B.e^{x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}},$$

e représentant la base des logarithmes hyperboliques, A et B les deux constantes arbitraires. Mais il est visible qu'ici la constante B doit être nulle, car la valeur de v ne peut croître indéfiniment avec x. De plus comme on doit avoir $v=U$ quand $x=0$, la constante A doit être égale à U. L'expression demandée des températures permanentes est donc

$$v = U.e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}}.$$

Ainsi, les températures des divers points du prisme étant représentées par des nombres, les distances de ces points au foyer sont représentés par les logarithmes correspondants. Dans deux barres de même substance, les distances du foyer où l'on observe la même température sont proportionnelles à la quantité $\sqrt{\frac{\Omega}{\gamma}}$, ou à la racine quarrée des dimensions homologues si les sections

sont semblables, Dans deux barres de substances différentes, ces mêmes distances sont proportionnelles au rapport $\sqrt{\frac{K\Omega}{h\gamma}}$. Les observations de ce genre peuvent faire connaître pour divers corps la valeur du rapport $\frac{K}{h}$ des deux conducibilités. On a même cherché à faire servir les observations dont il s'agit, à déterminer les valeurs relatives de la conducibilité intérieure K, en recouvrant chaque prisme d'une couche de vernis, dans la vue de leur donner la même conducibilité extérieure, procédé qui ne présente peut-être pas toute l'exactitude nécessaire.

450. On déduit d'ailleurs facilement de l'équation précédente toutes les circonstances du mouvement de la chaleur dans les différentes parties du prisme. La quantité de chaleur qui traverse dans l'unité de temps la section placée à la distance x du foyer, est

$$K\Omega.\frac{dv}{dx} = U.\sqrt{hK.\gamma\Omega}.e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}},$$

et par conséquent, la quantité de chaleur qui sort du foyer, et qui se dissipe dans l'air par la surface entière de la barre, est dans le même temps

$$U.\sqrt{hK.\gamma\Omega}.$$

Cette quantité est donc proportionnelle à la puissance $\frac{3}{2}$ des dimensions homologues pour des barres de même substance et de figures semblables.

451. Admettons maintenant qu'il s'agisse d'une barre prismatique d'une longueur déterminée représentée par a, et dont les deux extrémités soient maintenues respectivement aux températures constantes U et V. La loi des températures permanentes sera toujours donnée par l'équation différentielle du n° 448 ; mais dans l'intégrale générale du n° 449, que nous pouvons écrire

$$v = A.e^{-\lambda x} + B.e^{\lambda x},$$

en posant pour abréger $\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}} = \lambda$, on devra déterminer les constantes arbitraires A et B de manière que $v=U$ lorsque $x=0$, et $v=V$ lorsque $x=a$. Cette intégrale deviendra alors

$$v = \frac{U\left(e^{-\lambda(a-x)} - e^{\lambda(a-x)}\right) + V\left(e^{-\lambda x} - e^{\lambda x}\right)}{\left(e^{-\lambda a} - e^{\lambda a}\right)},$$

expression qui donnera les températures d'un point quelconque de la barre compris entre ses deux extrémités.

452. Les résultats précédents ne supposent pas nécessairement que l'axe de la barre soit rectiligne. Les dimensions de la section transversale étant supposées très-petites, on peut attribuer à cette barre une figure quelconque, et même supposer que ses deux extrémités sont réunies, de manière à former un anneau. La formule du numéro précédent exprimera toujours les températures permanentes d'une portion de la barre comprise entre deux foyers, dont l'intervalle est a, et qui sont maintenus respectivement aux températures U et V.

Si la barre forme un anneau, et s'il n'y a qu'un seul foyer maintenu à la température U, on aura évidemment dans toute l'étendue de l'anneau

$$v = U\,\frac{e^{-\lambda(a-x)} - e^{\lambda(a-x)} + e^{-\lambda x} - e^{\lambda x}}{e^{-\lambda a} - e^{\lambda a}},$$

ou

$$v = U\,\frac{e^{\lambda(a-x)} + e^{\lambda a}}{e^{\lambda a} + 1},$$

a désignant la longueur de son périmètre. Si l'on veut compter les x du point de l'anneau opposé au foyer, et qui partage le périmètre en deux parties égales, on aura

$$v = U\,\frac{e^{-\lambda x} + e^{\lambda x}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda a} + e^{\frac{1}{2}\lambda a}}.$$

On ne donnera à x dans la première de ces formules que des valeurs comprises entre 0 et a, et dans la seconde que des valeurs comprises entre $-\frac{a}{2}$ et $+\frac{a}{2}$.

453. Considérons trois points de l'intervalle compris entre deux foyers situés aux distances $x, x+\alpha$ et $x+2\alpha$ de l'origine des x. En désignant respectivement par v_0, v_1, v_2 leurs températures, on aura, d'après l'équation générale du n° 451

$$v_0 = A.e^{-\lambda x} + B.e^{\lambda x},$$
$$v_1 = A.e^{-\lambda(x+\alpha)} + B.e^{\lambda(x+\alpha)},$$
$$v_2 = A.e^{-\lambda(x+2\alpha)} + B.e^{\lambda(x+2\alpha)}.$$

Donc

$$\frac{v_0 + v_2}{v_1} = \frac{Ae^{-\lambda x}(1 + e^{-2\lambda\alpha}) + Be^{\lambda x}(1 + e^{2\lambda\alpha})}{Ae^{-\lambda(x+\alpha)} + Be^{\lambda(x+\alpha)}},$$

ou bien

$$\frac{v_0+v'}{v_1}=e^{-\lambda\alpha}+e^{\lambda\alpha}.$$

On voit donc que l'état permanent des températures d'une barre ou d'un anneau est toujours tel, que prenant entre deux foyers plusieurs points également espacés, et considérant trois de ces points placés les uns à la suite des autres, la somme des températures des points extrêmes, divisée par la température du point intermédiaire, présentera toujours une même valeur qui dépend uniquement de la distance α des points dont il s'agit. Ce résultat remarquable a été vérifié par l'expérience.

XXXIV. Elimination des variables entre les équations différentielles simultanées. — Intégration des équations linéaires simultanées.

454. Considérons plusieurs variables x, y, z, etc., regardées comme des fonctions d'une autre variable indépendante v, et admettons que l'on ait plusieurs équations entre les variables x, y, z, etc., et leurs coefficients différentiels

$$\frac{dx}{dv},\ \frac{d^2x}{dv^2},\ \text{etc.}\ldots;\ \frac{dy}{dv},\ \frac{d^2y}{dv^2},\ \text{etc.}\ldots;\ \frac{dz}{dv},\ \frac{d^2z}{dv^2},\ \text{etc.}\ldots$$

Si les équations dont il s'agit, sont en même nombre que les variables x, y, z, etc., on pourra toujours déduire du système de ces équations, des équations différentielles séparées contenant une seule de ces variables avec la variable indépendante v. L'intégration des équations proposées, c'est-à-dire la recherche des expres-

sions générales de x, y, z, etc., en fonction de la variable indépendante, serait ainsi ramenée au cas d'une seule équation différentielle entre deux variables.

En effet, supposons que l'on n'ait que deux équations entre les deux variables x et y, et leurs coefficients différentiels pris par rapport à ν. Soit m l'ordre de la première équation par rapport à y, et n l'ordre de la seconde équation, par rapport à la même variable. On différentiera n fois la première équation, et m fois la seconde, ce qui donnera, en comprenant les équations proposées, $m+n+2$ équations, au moyen desquelles on peut éliminer la variable y et ses coefficients différentiels $\frac{dy}{d\nu}, \frac{d^2y}{d\nu^2}, \frac{d^3y}{d\nu^3}$, etc., jusqu'à l'ordre $m+n$. Il restera une équation qui ne contiendra que la variable x seule et ses coefficients différentiels. On obtiendra de la même manière une équation en y. La même remarque s'applique au cas où le nombre des variables et des équations proposées est plus considérable. On voit de plus que, si les équations différentielles proposées sont linéaires, l'élimination dont il s'agit, conduira à une équation finale également linéaire.

455. On peut, dans quelques cas, et particulièrement lorsque les équations différentielles simultanées sont linéaires et à coefficients constants, obtenir directement des équations primitives dont on déduirait les valeurs générales des variables. Considérons d'abord deux équations du premier ordre, qui seront généralement de la forme

$$\mathrm{P}\frac{dx}{d\nu}+\mathrm{Q}\frac{dy}{d\nu}+\mathrm{S}x+\mathrm{T}y=\mathrm{U},$$

$$\mathrm{P}'\frac{dx}{d\nu}+\mathrm{Q}'\frac{dy}{d\nu}+\mathrm{S}'x+\mathrm{T}'y=\mathrm{U}'.$$

Par une élimination facile, on peut les ramener à la forme plus simple

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dv}+\mathrm{S}x+\mathrm{T}y=\mathrm{U}\\[2mm]\dfrac{dy}{dv}+\mathrm{S}'x+\mathrm{T}'y=\mathrm{U}'\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Nous regarderons en général S, T, U, S′, T′, U′ comme représentant des fonctions quelconques de v. La difficulté consiste ici en ce que les deux variables x, y, se trouvent à la fois dans les deux équations proposées, et il s'agit de remplacer ces deux équations par deux autres qui ne contiendraient chacune qu'une seule variable avec la variable indépendante v. Pour y parvenir, on multipliera la seconde équation par un facteur Φ qui sera une fonction indéterminée de v, et on l'ajoutera à la première, ce qui donnera

$$\frac{dx}{dv}+\Phi\frac{dy}{dv}+(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi)\,x+(\mathrm{T}+\mathrm{T}'\Phi)\,y=\mathrm{U}+\mathrm{U}'\Phi.$$

De plus on posera $x+\Phi y=u$, d'où

$$x=u-\Phi y,$$
$$\frac{dx}{dv}+\Phi\frac{dy}{dv}=\frac{du}{dv}-\frac{d\Phi}{dv}y,$$

u étant une nouvelle variable. Ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente la changeront en

$$\frac{du}{dv}+(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi)u-y\left\{\left[\frac{d\Phi}{dv}+(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi)\Phi\right]-(\mathrm{T}+\mathrm{T}'\Phi)\right\}=\mathrm{U}+\mathrm{U}'\Phi\,;$$

et en déterminant la fonction Φ de manière à satisfaire à l'équation

$$\frac{d\Phi}{dv}+(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi)\Phi-(\mathrm{T}+\mathrm{T}'\Phi)=0\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

il restera à intégrer l'équation

$$\frac{du}{dv}(S+S'\Phi)\,u=U+U'\Phi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

L'équation (2) ne contient que les variables Φ et v. Si l'on peut trouver une valeur pour Φ qui satisfasse à cette équation, on la substituera dans l'équation (3), *qui ne* contiendra plus que les variables u et v, et *qui rentrera* dans les cas traités n° 438 et suivants.

456. Si les coefficients S,T, S',T' des équations (1), sont constants, on pourra satisfaire à l'équation (2), en prenant pour Φ un nombre constant, ce qui donne $\frac{d\Phi}{dv}=0$, la valeur de ce nombre étant déterminée par l'équation du second degré.

$$(S+S'\Phi)\,\Phi-(T+T'\Phi)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

En appliquant d'ailleurs à l'équation (3), la méthode du numéro 386, on trouvera pour l'intégrale de cette équation

$$u=e^{-(S+S'\Phi)v}\left[a+\int dv(U+U'\Phi).e^{(S+S'\Phi)v}\right]\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

a étant la constante arbitraire. On doit mettre dans cette expression à la place de Φ, les deux valeurs qui satisfont à l'équation (4); en les désignant par Φ_1 et Φ_2, et remplaçant u par son expression en x et y, on aura les deux équations primitives

$$x+\Phi_1 y=e^{-(S+S'\Phi_1)v}\left[a_1+\int dv(U+U'\Phi_1).e^{(S+S'\Phi_1)v}\right],$$
$$x+\Phi_2 y=e^{-(S+S'\Phi_2)v}\left[a_2+\int dv(U+U'\Phi_2).e^{(S+S'\Phi_2)v}\right],$$

au moyen desquelles on pourra déterminer les expressions de chacune des variables x et y en fonction de v.

457. Si les racines de l'équation (4) étaient imaginaires, et désignées par $\alpha \pm 6\sqrt{-1}$, l'équation (2), à laquelle la quantité Φ doit satisfaire, pourrait alors se mettre sous la forme

$$\frac{d\Phi}{d\nu} + S'[(\Phi-\alpha)^2 + 6^2] = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\Phi}{(\Phi-\alpha)^2 + 6^2} + S'd\nu = 0;$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{6}\text{ arc tang. }\frac{\Phi-\alpha}{6} = C - S'\nu,$$

c désignant une constante arbitraire, et donne

$$\Phi = \alpha + 6.\text{tang.}\,6(C - S'\nu).$$

En donnant à la constante c deux valeurs particulières quelconques; en supposant par exemple $6C=0$ et $6C = \frac{\pi}{2}$, on aura les deux valeurs

$$\Phi = \alpha - 6.\text{tang.}\,6S'\nu \quad \text{et} \quad \Phi = \alpha + 6.\text{cot.}\,6S'\nu,$$

qui étant substituées successivement dans l'équation (5), donneront les deux équations nécessaires pour déterminer x et y en fonction de ν.

Si les deux racines de l'équation (4) étaient égales entre elles, et représentées par ρ, l'équation (2) se mettrait sous la forme

$$\frac{d\Phi}{d\nu} + S'(\Phi-\rho)^2 = 0,$$

ou

$$\frac{d\Phi}{(\Phi-\rho)^2} + S'd\nu = 0;$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{\Phi-\rho}=C+S'\nu,$$

c désignant toujours une constante arbitraire ; d'où l'on tire

$$\Phi=\rho+\frac{1}{C+S'\nu}.$$

En donnant à c deux valeurs particulières quelconques, supposant par exemple $c=\infty$ et $c=0$, on aura

$$\Phi=\rho \quad \text{et} \quad \Phi=\rho+\frac{1}{S'\nu},$$

valeurs qui devront être substituées comme ci-dessus dans l'équation (5).

458. Supposons maintenant que l'on ait trois équations du premier ordre entre les variables x,y,z et la variable indépendante ν, qui, d'après ce qui a été dit n° 455, pourront toujours se ramener à la forme

$$\frac{dx}{d\nu}+Sx+Ty+Uz=V,$$

$$\frac{dy}{d\nu}+S'x+T'y+U'z=V',$$

$$\frac{dz}{d\nu}+S''x+T''y+U''z=V''.$$

On multipliera respectivement la seconde et la troisième équation par les facteurs indéterminés Φ et Ψ, et on les ajoutera à la première, ce qui donnera

$$\frac{dx}{d\nu}+\Phi\frac{dy}{d\nu}+\Psi\frac{dz}{d\nu}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\,x+(T+T'\Phi+T''\Psi)\,y$$
$$+(U+U'\Phi+U''\Psi)\,z=V+V'\Phi+V''\Psi.$$

On posera ensuite

$$x+\Phi y+\Psi z=u, \text{ d'où } x=u-\Phi y-\Psi z,$$

$$\frac{dx}{dv}+\Phi\frac{dy}{dv}+\Psi\frac{dz}{dv}=\frac{du}{dv}-\frac{d\Phi}{dv}y-\frac{d\Phi}{dv}z,$$

u désignant une nouvelle variable. Ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente, il viendra

$$(S+S'\Phi+S''\Psi)u-y\left[\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Phi-(T+T'\Phi+T''\Psi)\right]$$

$$-z\left[\frac{d\Psi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Psi-(U+U'\Phi+U''\Psi)\right]=V+V'\Phi+V''\Psi.$$

Ainsi, déterminant Φ et Ψ de manière à satisfaire aux deux équations

$$\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Phi-(T+T'\Phi+T''\Psi)=0,$$

$$\frac{d\Psi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Psi-(U+U\Phi'+U''\Psi)=0;$$

il restera à intégrer

$$\frac{du}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)u=V+V'\Phi+V''\Psi,$$

entre les seules variables u et v. Les équations seront donc résolues si l'on peut trouver des valeurs de Φ et Ψ qui satisfassent aux deux équations dont dépendent ces fonctions.

459. Si l'on admet comme dans le n° 456, que les coefficients $S,T,U,S',T',U',S'',T'',U''$ des premiers membres des équations proposées soient des nombres constants, on pourra prendre pour Φ et Ψ des valeurs constantes, déterminées par les équations

$$(S+S'\Phi+S''\Psi)\,\Phi-(T+T'\Phi+T''\Psi)=0\,,$$
$$(S+S'\Phi+S''\Psi)\,\Psi-(U+U'\Phi+U''\Psi)=0\,,$$

et comme les équations finales donnant les valeurs de Φ et Ψ monteront au troisième degré, on aura trois systèmes de valeurs que nous désignerons respectivement par Φ_1 et Ψ_1, Φ_2 et Ψ_2, Φ_3 et Ψ_3.

L'intégrale de l'équation entre u et v étant *d'ailleurs*

$$u=e^{-(S+S'\Phi+S''\Psi)v}\left[a+\int dv(U+U'\Phi+U''\Psi).e^{(S+S'\Phi+S''\Psi)v}\right],$$

nous aurons les trois équations primitives

$$x+\Phi_1 y+\Psi_1 z=e^{-(S+S'\Phi_1+S''\Psi_1)v}\left[a_1+\int dv(U+U'\Phi_1+U''\Psi_1).e^{(S+S'\Phi_1+S''\Psi_1)v}\right]$$
$$x+\Phi_2 y+\Psi_2 z=e^{-(S+S'\Phi_2+S''\Psi_2)v}\left[a_2+\int dv(U+U'\Phi_2+U''\Psi_2)\,e^{(S+S'\Phi_2+S''\Psi_2)v}\right]$$
$$x+\Phi_3 y+\Psi_3 z=e^{-(S+S'\Phi_3+S''\Psi_3)v}\left[a_3+\int dv(U+U'\Phi_3+U''\Psi_3).e^{(S+S'\Phi_3+S''\Psi_3)v}\right]$$

qui détermineront les valeurs de x,y,z en fonction de v.

La même méthode s'applique aux cas où l'on a un plus grand nombre de variables et d'équations différentielles, et l'on voit que ces équations s'intègrent toujours lorsque les coefficients des premiers membres sont constants.

460. Nous avons supposé jusqu'ici que les équations différentielles proposées étaient du premier ordre. Le cas où ces équations sont du second ordre et des ordres supérieurs est ramené au précédent de la manière suivante. Soient par exemple les deux équations du second ordre

$$\frac{d^2x}{dv^2}+A\frac{dx}{dv}+B\frac{dy}{dv}+Cx+Dy=E\,,$$
$$\frac{d^2y}{dv^2}+A'\frac{dx}{dv}+B'\frac{dy}{dv}+C'x+D'y=E'$$

On posera $\frac{dx}{dv}=p, \frac{dy}{dv}=q$, p et q désignant de nouvelles variables. On aura alors les équations du premier ordre

$$\frac{dp}{dv}+Ap+Bq+Cx+Dy=E,$$
$$\frac{dq}{dv}+A'p+B'q+C'x+D'y=E',$$
$$\frac{dx}{dv}-p=0,$$
$$\frac{dy}{dv}-q=0.$$

entre les quatre variables x, y, p, q, et la variable indépendante v. Ces équations étant traitées par la méthode des n° 455 et suivants, conduiront aux expressions demandées de x et y.

XXXV. Intégration par séries des fonctions différentielles.

461. Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir en termes finis, par le moyen des méthodes connues, l'expression de la fonction qui est donnée par une équation différentielle, on peut chercher à obtenir cette expression sous la forme d'un développement en série infinie. Si la série est convergente, l'expression dont il s'agit, sera aussi propre que toute autre, à faire connaître les valeurs numériques de la fonction cherchée.

Le développement en série de la fonction y donnée par l'équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,$$

peut s'obtenir en général au moyen de ce qui a été dit dans le n° 427. Cette équation étant résolue par rapport à $\frac{d^ny}{dx^n}$ donnera les valeurs de ce coefficient différentiel et des coefficients différentiels des ordres supérieurs correspondantes à $x=0$; et en substituant ces valeurs dans l'expression générale

$$y=y_0+\frac{dy_0}{dx}x+\frac{d^2y^0}{dx^2}\frac{x^2}{2}+\frac{d^3y_0}{dx^3}\frac{x^3}{2.3}+\text{etc.},$$

on aura le développement de la fonction y, dans lequel il restera les n coefficients arbitraires $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$.

Dans les cas particuliers où la supposition de $x=0$ rendrait infinies les valeurs de $\frac{d^ny}{dx^n}$ et des coefficients différentiels des ordres supérieurs, on remarquerait que la formule de Taylor donnée n° 80, devient, en y faisant $x=a$, puis $h=x-a$

$$y=y_a+\frac{dy_a}{dx}(x-a)+\frac{d^2y_a}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{2}+\frac{d^3y_a}{dx^3}\frac{(x-a)^3}{2.3}+\frac{d^4y_a}{dx^4}\frac{(x-a)^4}{2.3.4}+$$

où l'on représente par y_a, $\frac{dy_a}{dx}$, $\frac{d^2y_a}{dx^2}$, etc., les valeurs particulières que prennent $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., lorsqu'on donne à x la valeur a. On déduirait donc de l'équation différentielle proposée les valeurs de $\frac{d^ny_n}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y_a}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2}y_a}{dx^{n+2}}$, etc., que l'on substituerait dans l'expression précédente. On pourrait d'ailleurs attribuer

à a toute valeur qui ne rendrait pas infinies les valeurs des coefficients différentiels de l'ordre n, et des ordres plus élevés.

462. Il est souvent plus simple et plus facile de substituer à l'opération qui vient d'être indiquée, la méthode des coefficients indéterminés. Soit, par exemple, l'équationdu second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0.$$

On posera pour satisfaire à cette équation

$$y = A_0x^\alpha + A_1x^{\alpha+1} + A_2x^{\alpha+2} + A_3x^{\alpha+3} + A_4x^{\alpha+4} + \text{etc},$$

A_0, A_1, A_2, etc., désignant des coefficients constants indéterminés, et α un exposant également indéterminé. Si l'on substitue cette expression de y dans l'équation proposée il viendra

$$0 = A_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + A_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1} + A_2(\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha \left.\begin{matrix} +A_3(\alpha+3)(\alpha+2) \\ +A_0 \end{matrix}\right| x^{\alpha+1} \left.\begin{matrix} +A_4(\alpha+4)(\alpha+3) \\ +A_1 \end{matrix}\right| x^{\alpha+2} + \text{etc.},$$

équation où l'on fera disparaître les deux premiers termes du second membre, en supposant $\alpha=0$, et laissant indéterminées les constantes A_0 et A_1. Le troisième disparaîtra en supposant $A_2=0$. Quant aux termes suivants, ils deviendrons nuls en déterminant convenablement les coefficients A_3, A_4, A_5, etc., au moyen des trois premiers. Les valeurs de ces coefficients seront données par les équations

$$-A_3 = \frac{A_0}{2.3}, \quad \text{d'où l'on déduit} \quad A_3 = -\frac{A_0}{2.3}$$

$$-A_4 = \frac{A_1}{3.4} \qquad A_4 = -\frac{A_1}{3.4}$$

$$-A_5 = \frac{A_2}{4.5} \qquad A_5 = 0$$

$$-A_6 = \frac{A_3}{5.6} \qquad A_6 = \frac{A_0}{2.3.5.6}$$

$$-A_7 = \frac{A_4}{6.7} \qquad A_7 = \frac{A_1}{3.4.6.7}$$

$$-A_8 = \frac{A_5}{7.8} \qquad A_8 = 0$$

$$-A_9 = \frac{A_6}{8.9} \qquad A_9 = -\frac{A_0}{2.3.5.6.8.9}$$

$$-A_{10} = \frac{A_7}{9.10} \qquad A_0 = -\frac{A_1}{3.4.6.7.9.10}$$

etc. etc.

La série qui donne l'expression cherchée de y est donc

$$y = A_0\left(1 - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} - \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \text{etc.}\right)$$
$$+ A_1\left(x - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} - \frac{x^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \text{etc.}\right).$$

A_0 et A_1 sont les deux constantes arbitraires.

463. Si l'équation proposée était

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{x} = 0,$$

la substitution de l'expression

$$y = A_0x^{\alpha} + A_1x^{\alpha+1} + A_2x^{\alpha+2} + A_3x^{\alpha+3} + A_4^{\alpha+4} + \text{etc.}$$

donnerait l'équation de condition

$$0=A_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\left.\begin{matrix}A_1(\alpha+1)\alpha\\+A_0\end{matrix}\right|x^{\alpha-1}+\left.\begin{matrix}A_2(\alpha+2)(\alpha+1)\\+A_1\end{matrix}\right|x^{\alpha}$$

$$+\left.\begin{matrix}A_3(\alpha+3)(\alpha+2)\\+A_2\end{matrix}\right|x^{\alpha+1}+\text{etc.}$$

On fait disparaître le premier terme en posant $\alpha=0$ ou $\alpha=1$ mais la première hypothèse ne peut être admise parce que le second terme ne pourrait alors disparaître qu'en supposant aussi $A_0=0$. En faisant donc $\alpha=1$, les coefficients différentiels seront déterminés par les équations

$-A_1.2.1=A_0$, d'où l'on déduit $A_1=-\dfrac{A_0}{1.2}$

$-A_2.3.2=A_1$ $\qquad A_2=\dfrac{A_0}{1.2^2.3}$

$-A_3.4.3=A_2$ $\qquad A_3=-\dfrac{A_0}{1.2^2.3^2.4}$

$-A_4.5.4=A_3$ $\qquad A_4=\dfrac{A_0}{1.2^2.3^2.4^2.5}$ etc.

$-A_5.6.5=A_4$

etc.

Par conséquent l'équation est satisfaite par la valeur

$$y=A_0\left(x-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2^2.3}-\frac{x^4}{1.2^2.3^2.4}+\frac{x^5}{1.2^2.3^2.4^2.5}-\text{etc.}\right).$$

Cette expression ne contenant qu'une seule constante arbitraire, présente bien une infinité de valeurs particulières de la fonction y : mais elle n'est pas l'intégrale générale de l'équation proposée. Il est aisé de reconnaître d'ailleurs que l'on ne peut satisfaire à cette équation par une série ordonnée suivant les puissances descendantes de x.

464. Nous considérerons encore l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0.$$

En posant comme ci-dessus,

$$y=A_0x^\alpha+A_1x^{\alpha+1}+A_2x^{\alpha+2}+A_3x^{\alpha+3}+A_4x^{\alpha+4}+\text{etc.},$$

et substituant cette expression dans l'équation proposée, il viendra

$$0=\left.\begin{array}{r}A_0\alpha(\alpha-1)\\+A_0\alpha\\ \\\end{array}\right|x^{\alpha-2}+\left.\begin{array}{r}A_1(\alpha+1)\alpha\\+A_1(\alpha+1)\\ \\\end{array}\right|x^{\alpha-1}+\left.\begin{array}{r}A_2(\alpha+2)(\alpha+1)\\+A_2(\alpha+2)\\+A_0\end{array}\right|x^{\alpha}$$

$$+\left.\begin{array}{r}A_3(\alpha+3)(\alpha+2)\\+A_3(\alpha+3)\\+A_1\end{array}\right|x^{\alpha+1}+\left.\begin{array}{r}A_4(\alpha+4)(\alpha+3)\\+A_4(\alpha+4)\\+A_2\end{array}\right|x^{\alpha+2}+\text{etc.}$$

On fait disparaître le premier terme du second membre en faisant $\alpha=0$ sans déterminer A_0; mais alors le second terme ne disparaît pas, à moins que l'on ne fasse $A_1=0$. De même on fait disparaître le second terme en posant $\alpha=-1$, le coefficient A_1 demeurant indéterminé, mais alors le premier terme ne disparaîtra pas, à moins qu'on ne suppose $A_0=0$. Si l'on fait donc $\alpha=0$, les coefficients seront déterminés par les équations

$A_0 = A_0$, d'où l'on déduit	$A_0 = A_0$
$A_1 = 0$	$A_1 = 0$
$-A_2 = \frac{A_0}{2+2}$	$A_2 = -\frac{A_0}{4} = -\frac{A_0}{2^2}$
$-A_3 = \frac{A_1}{6+3}$	$A_3 = 0$
$-A_4 = \frac{A_2}{12+4}$	$A_4 = \frac{A_0}{4.16} = \frac{A_0}{2^2.4^2}$
$-A_5 = \frac{A_3}{20+5}$	$A_5 = 0$
$-A_6 = \frac{A_4}{30+6}$	$A_6 = -\frac{A_0}{4.16.36} = -\frac{A_0}{2^2.4^2.6^2}$
etc.	etc.

On satisfera donc à l'équation proposée par la série

$$y = A_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}\right).$$

Quant à la supposition de $\alpha = -1$, il est aisé de reconnaître qu'elle conduirait à la même série que l'on vient de trouver. On n'obtient encore ici qu'une formule propre à donner des intégrales particulières, mais non l'intégrale générale de l'équation proposée.

465. Lorsque la substitution d'une série ascendante de l'invariable x dans l'équation différentielle ne donne qu'une valeur particulière, cela tient généralement à ce que l'intégrale complète doit contenir des termes affectés du logarithme de cette variable. Ayant trouvé, par exemple, pour l'équation précédente

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

la valeur particulière

$$Y' = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.},$$

on posera, pour obtenir l'intégrale complète, conformément à ce qu'on a vu dans les n°s 442 et 443, $y=AY'$, A désignant une fonction de x, ce qui donne

$$\frac{dy}{dx}=A\frac{dY'}{dx}+\frac{dA}{dx}Y',$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A\frac{d^2Y'}{dx^2}+2\frac{dA}{dx}\frac{dY'}{dx}+\frac{d^2A}{dx^2}Y'.$$

Mettant ces valeurs dans l'équation précédente, et supprimant les termes affectés de A dont la somme est nulle, il restera pour déterminer A l'équation

$$Y'\frac{d^2A}{dx^2}+\left(2\frac{dY'}{dx}+\frac{Y'}{x}\right)\frac{dA}{dx}=0;$$

qui devient, en posant $\frac{dA}{dx}=t$,

$$Y'\frac{dt}{dx}+\left(2\frac{dY'}{dx}+\frac{Y'}{x}\right)t=0 \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{t}+\frac{2dY'}{Y'}+\frac{dx}{x}=0,$$

d'où l'on tire $t=\frac{1}{xY'^2}$, et par conséquent $A=\int\frac{dx}{xY'^2}$.

On en conclut que l'expression de l'intégrale complète est

$$y=Y'\left(a+b\int\frac{dx}{xY'^2}\right),$$

a et b étant les deux constantes arbitraires. D'ailleurs

$$\int\frac{dx}{xY'^2}=\int\frac{dx}{x}(1+\alpha x^2+6x^4+\text{etc.})=lx+\frac{\alpha x^2}{2}+\frac{6x^4}{4}+\text{etc.},$$

$\alpha, 6$, etc., désignant des coefficients numériques qu'il est

facile de déterminer. Cette expression devient donc

$$y=\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\text{etc.}\right)\left[a+b\left(lx+\frac{\alpha x^2}{2}+\frac{6x^4}{4}+\text{etc.}\right)\right].$$

XXXVI. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES ORDINAIRES DU PREMIER ORDRE A TROIS VARIABLES.

466. Soit proposée l'équation différentielle

$$P.dx+Qdy+Rdz=0,$$

dans laquelle P,Q,R désignent des fonctions quelconques des trois variables $x.y,z$. Si cette équation est le résultat immédiat de la différentiation d'une équation primitive $F(x,y,z)=0$, son premier membre satisfera aux conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles du premier ordre à trois variables, et on pourra en trouver l'intégrale, qui devra être complétée par une constante arbitraire.

Mais si l'équation proposée résulte de l'élimination d'une constante entre l'équation primitive $F(x,y,z)=0$, et l'équation différentielle qui s'en déduit immédiatement, ou si l'on a supprimé après la différentiation un facteur commun à tous les termes, elle ne satisfera plus en général aux conditions d'intégrabilité. Néanmoins cette équation ayant été déduite d'une relation donnée entre les trois variables x,y,z, dont deux d'entre elles, par exemple x et y, peuvent être regardées comme indépendantes, et la troisième z comme fonction de ces deux-ci, il s'ensuit que tirant la valeur de dz qui sera

$$dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy,$$

cette expression doit satisfaire à la condition générale de l'expression de la différentielle des fonctions de deux variables indépendantes; en sorte que l'on doit avoir

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{P}{R}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{R}\right),$$

ou, en faisant attention que z est contenu dans les fonctions P,Q et R,

$$R\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dP}{dz}\frac{dz}{dy}\right)-P\left(\frac{dR}{dy}+\frac{dR}{dz}\frac{dz}{dy}\right)$$
$$=R\left(\frac{dQ}{dx}+\frac{dQ}{dz}\frac{dz}{dx}\right)-Q\left(\frac{dR}{dx}+\frac{dR}{dz}\frac{dz}{dx}\right).$$

Mettant pour $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ leurs valeurs $-\frac{P}{R}$ et $-\frac{Q}{R}$ et réduisant, il vient

$$P\frac{dR}{dy}-P\frac{dQ}{dz}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}+R\frac{dQ}{dx}-R\frac{dP}{dy}=0.$$

Cette équation exprime la condition nécessaire pour que l'on puisse regarder dans l'équation proposée deux quelconques des variables comme indépendantes, et la troisième comme une fonction des deux autres. On pourra alors considérer l'équation dont il s'agit comme appartenant à une surface.

467. Lorsque l'équation de condition que l'on vient d'obtenir est satisfaite, l'intégration de l'équation proposée dépend uniquement de l'intégration d'une équation à deux variables seulement. En effet, regardons la variable z comme constante, et supposons par conséquent $dz=0$, l'équation proposée se réduirait à

$$Pdx+Qdy=0,$$

qui appartient à une section quelconque faite dans la surface par un plan parallèle au plan des xy, à une distance de ce plan marquée par la valeur constante attribuée à la coordonnée z, dans les fonctions P et Q. Si l'on parvient à intégrer cette équation, il faudra regarder la constante qui complétera cette intégrale comme une fonction de z, et nous représenterons l'intégrale dont il s'agit par

$$\varphi(x, y, z) = Z,$$

Z désignant une fonction de z seule. Or, en différentiant cette dernière équation en y faisant varier x, y, z, il viendra

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = dZ,$$

et comme le second membre est une fonction de z seule, il doit en être de même du premier membre. Par conséquent, en éliminant de ce premier membre une des variables x, y, au moyen de l'équation $\varphi(x, y, z) = Z$, l'autre doit disparaître d'elle-même, en sorte qu'il ne restera qu'une équation différentielle entre z et Z. Cette équation étant intégrée, donnera l'expression de Z en z, avec une constante arbitraire ; et en remplaçant Z par cette expression dans l'équation $\varphi(x, y, z) = Z$, on aura l'intégrale cherchée.

468. Soit proposée, par exemple, l'équation différentielle suivante,

$$(2xz + z^2)\,dx + 2yzdy - 2(x^2 + y^2 + b)\,dz = 0,$$

qui satisfait à l'équation de condition du n° 466. En y regardant z comme constante elle se réduit à

$$(2x + z^2)\,dx + 2ydy = 0,$$

où les variables sont séparées, et dont l'intégrale est

$$x^2+y^2+xz^2=Z,$$

Z étant la constante arbitraire, que nous regardons ici comme une fonction de z. Différentiant cette dernière équation en faisant tout varier, il vient

$$(2x+z^2)\,dx+2y\,dy+2xz\,dz=dZ,$$

que l'on peut changer, en ayant égard à l'équation proposée, en

$$2\frac{x^2+y^2+b}{z}dz+2xz\,dz=dZ.$$

Remplaçant dans cette équation y^2 par sa valeur déduite de l'équation $x^2+y^2+xz^2=Z$, la variable x disparaîtra, et il viendra simplement

$$2\frac{Z+b}{z}dz=dZ, \quad \text{ou} \quad \frac{2dz}{z}=\frac{dZ}{Z+b},$$

équation dont l'intégrale est

$$az^2=Z+b,$$

a désignant la constante arbitraire. Mettant donc pour Z la valeur qui se déduit de cette équation dans $x^2+y^2+xz^2=Z$, il viendra

$$x^2+y^2+(x-a)z^2+b=0,$$

qui est l'intégrale cherchée.

469. Lorsque l'équation différentielle proposée

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0,$$

ne satisfait pas à l'équation de condition du nº 466,

d'où l'on conclut qu'il n'est pas possible d'y regarder deux des variables comme indépendantes, et la troisième comme une fonction de celles-ci, on ne peut attribuer un sens analytique à cette équation qu'en admettant que deux des variables sont liées par une relation inconnue, mais existante. On devra donc supposer, par exemple, que x et y ont entre elles une relation exprimée par une équation telle que $\varphi(x,y)=0$, d'après laquelle l'équation proposée se réduirait à une équation à deux variables seulement, et pourrait être intégrée en conséquence, après la détermination de la fonction φ. Dans un tel cas l'équation dont il s'agit, ne peut pas être regardée comme appartenant à une surface. La fonction z est l'ordonnée des courbes, en nombre infini, que l'on obtiendra après avoir tracé arbitrairement sur le plan des xy les projections de ces courbes qui sont représentées par l'équation $\varphi(x,y)=0$.

XXXVII. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

470. Soient deux variables indépendantes x et y et une troisième variable z qui est regardée comme une fonction des deux premières : $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ représenteront les coefficients différentiels partiels de la fonction z pris respectivement par rapport à x et à y; en sorte que si x augmente de dx, l'accroissement de z sera $\frac{dz}{dx}dx$; et si y augmente de dy, l'accroissement de z sera $\frac{dz}{dy}dy$. Une équation aux différences partielles du premier

ordre entre les trois variables x, y, z exprime en *général* une relation entre les quantités $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, *et* peut être représentée par

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

f étant le signe d'une fonction quelconque. *Il s'agit de* concevoir la signification d'une telle équation, *et comment* peut être formée l'équation primitive à laquelle elle doit correspondre.

En général, les variables indépendantes x, y peuvent être regardées comme deux abscisses rectangulaires horizontales, et la variable z comme une ordonnée verticale. Ainsi z étant regardée comme une fonction de x et y, une relation entre ces trois variables sera considérée comme l'équation d'une surface définie par l'équation proposée.

Cela posé, étant donnée l'équation

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

supposons que l'on cherche à construire la surface qu'elle doit représenter. On déduira de cette équation la valeur de l'une quelconque des quantités $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ lorsque les quatre autres auront été données; par conséquent, on peut concevoir que la construction s'opère de la manière suivante. Traçons dans le plan des xz une courbe quelconque que nous regarderons comme l'intersection de la surface cherchée par ce plan. Pour un point

quelconque de cette courbe, on connaîtra x, y dont la valeur est nulle, z et $\frac{dz}{dx}$: l'équation proposée donnant $\frac{dz}{dy}$, la direction du plan tangent à la surface cherchée est déterminée dans toute l'étendue de la courbe dont il s'agit. Si donc, on conçoit un plan mené parallèlement au plan des xz à une distance très-petite Δy, on connaîtra l'intersection de la surface par ce plan avec une exactitude d'autant plus grande que Δy sera plus petite. On pourra se servir de cette intersection pour construire de la même manière, une nouvelle intersection avec un second plan mené à la distance Δy du premier ; et ainsi de suite. Ainsi la surface est en général déterminée dans toute son étendue, au moyen de l'équation différentielle, lorsqu'on s'est donné arbitrairement l'intersection de cette surface par un plan parallèle au plan des xz. Il est évident d'ailleurs qu'elle le serait également si l'on se donnait l'intersection de la surface par un plan parallèle aux yz.

On pourra voir par ce qui précède, que l'équation différentielle proposée appartient à une infinité de surfaces différentes, qui ont toutes un caractère commun exprimé par cette équation. La figure de chaque surface dépend de celle de la courbe arbitraire par laquelle on l'a fait passer. Si l'on veut que l'intégrale de l'équation proposée ait une signification aussi étendue que cette équation elle-même, elle doit représenter toutes les surfaces dont il s'agit. Cette intégrale, outre la condition de satisfaire à l'équation différentielle proposée, doit donc contenir une fonction arbitraire.

471. On reconnaît la vérité de cette proposition en remarquant que si l'on a une équation primitive contenant une fonction indéterminée, on peut toujours en déduire une équation du premier ordre où cette fonction ait entièrement disparu. Soit par exemple l'équation

$$F[x, y, z, \varphi(u)] = 0,$$

dans laquelle F et φ sont des signes de fonction, et u représente une certaine fonction de x, y, z. En différentiant successivement par rapport à x et à y, il viendra

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF}{d.\varphi(u)}\frac{d.\varphi(u)}{du}\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$
$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{dF}{d.\varphi(u)}\frac{d.\varphi(u)}{du}\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Eliminant ensuite $\varphi(u)$ et $\frac{d.\varphi(u)}{du}$ entre ces deux équations et l'équation primitive, il restera une équation différentielle du premier ordre dans laquelle la fonction φ n'entrera point. Cette équation exprimera une relation qui subsiste quelle que soit la forme qui, dans l'équation primitive, pourrait être attribuée à la fonction φ.

472. Considérons en général une équation primitive

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dans laquelle a, b désignent deux constantes. En différentiant successivement par rapport à x et à y, on aura les deux équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

et l'on pourra éliminer les constantes a et b, entre ces équations et l'équation primitive. On obtiendra de cette manière une équation différentielle du premier ordre dans laquelle ces constantes auront disparu, et qui par conséquent exprimera une propriété entièrement indépendante des valeurs particulières qui pourraient leur être attribuées. Nous représenterons cette équation par

$$f\left(x, y, z. \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

On voit, en premier lieu, qu'étant donnée l'équation (3), son intégrale, ou l'équation primitive dont elle dérive, devra contenir deux constantes arbitraires.

Mais si l'on regarde a, dans l'équation (1), comme une quantité variable, et b comme une fonction de a, les deux équations différentielles qui en dériveront seront alors

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da}\right)\left(\frac{da}{dx} + \frac{da}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$
$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} + \left(\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da}\right)\left(\frac{da}{dy} + \frac{da}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Or, ces deux équations ne différeront point des équations (2), pourvu seulement que l'on ait l'équation

$$\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} = 0.$$

Donc l'équation (1), conduira toujours à la même équation aux différences partielles (3), lorsqu'on y regardera a comme variable, et b comme une fonction quelconque de a, pourvu que a soit pris de manière à satisfaire à l'équation $\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} = 0$.

Il suit de là, qu'étant donnée une équation aux différences partielles du premier ordre, si l'on a trouvé une équation primitive $F=0$ avec deux constantes arbitraires a et b, qui satisfasse à cette équation, on aura une solution beaucoup plus étendue, en prenant $b=\varphi(a)$, et déterminant a par l'équation $\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}=0$. La fonction φ est la fonction arbitraire qui donne à la solution la généralité nécessaire.

473. Il est bon de remarquer que l'on pourrait également, dans l'équation primitive (1), regarder a et b comme deux quantités variables indépendantes l'une de l'autre, et que l'on aurait alors les deux équations dérivées,

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx}+\frac{da}{dz}\frac{dz}{dx}\right)+\frac{dF}{db}\left(\frac{db}{dx}+\frac{db}{dz}\frac{dz}{dx}\right)=0,$$
$$\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{dz}{dy}\right)+\frac{dF}{db}\left(\frac{db}{dy}+\frac{db}{dz}\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

que l'on ramène aux équations (2) en posant

$$\frac{dF}{da}=0, \quad \text{et} \quad \frac{dF}{db}=0.$$

Par conséquent si l'équation primitive $F=0$, contenant les deux constantes arbitraires a et b, satisfait à une équation aux différences partielles proposées, on voit que l'on y satisfera encore en mettant à la place de a et b dans cette équation les deux valeurs en x, y, z de ces quantités qui résultent des équations $\frac{dF}{da}=0$, $\frac{dF}{db}=0$. Mais comme le résultat que l'on obtiendrait ainsi, ne contient pas de fonction arbitraire, il ne

donne qu'une solution particulière de l'équation proposée.

474. Dans la géométrie, l'équation (1), avec deux constantes arbitraires, représente une infinité de surfaces correspondantes à toutes les valeurs que l'on peut attribuer à ces constantes, et auxquelles appartient toujours l'équation aux différences partielles (3). Lorsque l'on prend $b=\varphi(a)$, φ étant le signe d'une fonction quelconque, on considère la série de surfaces qui résulte de la fonction φ lorsque l'on attribue à a toutes les valeurs possibles depuis $-\frac{1}{0}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$. Or, mettant à la place de a, dans l'équation $F[x,y,z,a,\varphi(a)]=0$, la valeur $a+da$, le résultat, que nous représentons par $F+\frac{dF}{da}da=0$, appartiendra à une surface comprise dans cette série, et infiniment voisine de la surface représentée par l'équation $F=0$. Donc le système de ces deux équations $F=0$ et $F+\frac{dF}{da}da=0$, ou simplement $F=0$ et $\frac{dF}{da}=0$ (puisque la première fait disparaître le premier terme de la seconde quand on les regarde comme subsistant ensemble), appartient à la ligne d'intersection des deux surfaces consécutives, ligne que nous désignerons, d'après *Monge*, par le nom de *caractéristique*. Et si l'on élimine entre les deux équations dont il s'agit, la quantité a, le résultat, qui sera une équation entre x,y,z, appartiendra à la surface lieu de ces lignes d'intersection, c'est-à-dire à la surface enveloppe des surfaces qui résultent de l'équation $F[x,y,z,a,\varphi(a)]=0$, quand on y donne à a toutes les valeurs possibles. Or, l'équation différen-

tielle proposée doit évidemment appartenir à cette surface enveloppe, puisque le plan tangent étant toujours commun aux enveloppées et à l'enveloppe, les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ qui déterminent la direction de ce plan, leur doivent également être communes. Après que l'on a mis $\varphi(a)$ à la place de b, l'équation $\frac{dF}{da}=0$ ne diffère point de l'équation $\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}=0$ du n° 472. On voit donc que la solution générale de l'équation proposée est exprimée par le système des équations $F(x,y,z,a,b)=0$ et $\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}=0$, en mettant une fonction quelconque $\varphi(a)$ à la place de b, puis éliminant a entre ces deux équations.

475. De plus, si dans l'équation $F(x,y,z,a,b)=0$ on fait varier la quantité a seule, ce qui donne $F+\frac{dF}{da}da=0$; puis la quantité b seule, ce qui donne $F+\frac{dF}{db}db=0$, le système des équations $F=0$ et $\frac{dF}{da}=0$ représentera une caractéristique appartenant à une certaine surface enveloppe; et le système des équations $F=0$ et $\frac{dF}{db}=0$ représentera une autre caractéristique appartenant à une autre surface enveloppe infiniment voisine de la première. Donc le système des trois équations $F=0$, $\frac{dF}{da}=0$, $\frac{dF}{db}=0$ appartiendra aux points d'intersection de ces deux caractérisques; et par conséquent, si l'on élimine a et b entre ces trois équations, l'équation

en x, y, z qui en résultera, représentera la surface lieu de tous ces points d'intersection, c'est-à-dire une surface qui touche et enveloppe elle-même toutes les enveloppes dont il a été question ci-dessus, et qui est touchée par toutes les caractéristiques; surface à laquelle l'équation différentielle proposée doit encore appartenir, mais qui ne répond évidemment qu'à une solution particulière de cette équation.

Nous ajouterons qu'il existe généralement plusieurs équations différentes, analogues à l'équation (1) du n° 472, contenant deux constantes arbitraires, qui peuvent conduire à la même équation différentielle (3), et produire les mêmes surfaces enveloppes auxquelles répondront l'intégrale générale de cette équation et la solution particulière dont il vient d'être question.

Intégration des équations linéaires aux différences partielles du premier ordre.

476. Une équation aux différences partielles est linéaire lorsque les coefficients différentiels ne s'y trouvent qu'à la première puissance. Le cas le plus simple est celui où ces coefficients sont multipliés par des constantes. Les équations de ce genre ont la propriété d'être satisfaites par la somme d'un nombre quelconque de valeurs particulières, propriété qui donne immédiatement l'intégrale.

Soit en effet l'équation

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=0,$$

dans laquelle P et Q, sont des nombres constants. Pre-

nant pour valeur particulière (m et n étant des constantes)

$$z = e^{mx+ny}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dx} = m.e^{mx+ny}, \ \frac{dz}{dy} = n.e^{mx+ny},$$

et substituant cette valeur dans l'équation proposée, il vient

$$mP + nQ = 0, \qquad \text{d'où} \qquad n = -\frac{mP}{Q}.$$

La valeur $z = e^{m\left(x - \frac{Py}{Q}\right)}$, ou $z = e^{m(Qx-Py)}$, dans laquelle m demeure indéterminée, satisfait donc à l'équation proposée. Ainsi, l'on peut prendre pour l'expression de la fonction z une série formée d'un nombre quelconque de termes, telle que

$$z = A_1 e^{m_1(Qx-Py)} + A_2 e^{m_2(Qx-Py)} + A_3 e^{m_3(Qx-Py)} + \text{etc.},$$

dans laquelle m_1, m_2, m_3, etc., A_1, A_2, A_3, etc., désignent des constantes entièrement arbitraires. Or, il est visible qu'une telle série équivaut à une fonction arbitraire de la quantité $Qx - Py$ qui se trouve dans tous les termes. La formule précédente peut donc s'écrire

$$x = \varphi(Qx - Py),$$

φ étant le signe d'une fonction arbitraire, et l'on aura ainsi l'intégrale générale de l'équation proposée. On vérifie en effet, que cette expression de z satisfait à l'équation dont il s'agit.

477. L'équation

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = z,$$

dans laquelle P,Q désignent toujours des nombres constants, s'intègre de la même manière. La substitution de la valeur particulière $z=e^{mx+ny}$ donne pour équation de condition

$$mP+nQ=1, \quad \text{d'où} \quad m=\frac{1-nQ}{P}, \quad \text{ou} \quad n=\frac{1-mP}{Q}.$$

Ainsi les expressions

$$z=e^{\frac{y}{Q}+m\left(x-\frac{Py}{Q}\right)} \quad \text{et} \quad z=e^{\frac{x}{P}+n\left(y-\frac{Qx}{P}\right)},$$

dans lesquelles les constantes m ou n demeurent arbitraires, satisferont à l'équation proposée. Cette équation sera également satisfaite par les valeurs

$$z=e^{\frac{y}{Q}}.e^{m(Qx-Py)} \quad \text{et} \quad z=e^{\frac{x}{P}}.e^{n(Py-Qx)},$$

et par conséquent par les deux séries

$$z=e^{\frac{y}{Q}}\left[A_1e^{m_1(Qx-Py)}+A_2e^{m_2(Qx-Py)}+A_3e^{m_3(Qx-Py)}+\text{etc.}\right],$$
$$z=e^{\frac{x}{P}}\left[B_1e^{n_1(Py-Qx)}+B_2e^{n_2(Py-Qx)}+B_3e^{n_3(Py-Qx)}+\text{etc.}\right],$$

dans lesquelles A_1, A_2, etc., m_1, m_2, etc., B_1, B_2, etc., n_1, n_2, etc., représentent des coefficients arbitraires. Ces séries équivalent aux expressions

$$z=e^{\frac{y}{Q}}.\varphi(Qx-Py), \quad x=e^{\frac{x}{P}}.\psi(Py-Qx),$$

φ et ψ étant les signes de fonctions arbitraires. Il est aisé de reconnaître que la même surface peut être également représentée par ces deux expressions. L'une ou l'autre est l'intégrale générale de l'équation proposée.

478. Considérons maintenant l'équation

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=R,$$

dans laquelle P,Q,R, désignent des fonctions quelconques des variables x,y,z. Représentons par

$$f(x,y,z)=0,$$

l'intégrale générale de cette équation qui doit contenir une fonction arbitraire de ces variables. En la différentiant successivement par rapport à x et à y, il viendra

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}=0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}},$$

$$\frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dy}=0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}};$$

et comme ces valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ doivent satisfaire à l'équation proposée, on trouve, en les y substituant, l'équation

$$P\frac{df}{dx}+Q\frac{df}{dy}+R\frac{df}{dz}=0.$$

D'ailleurs, en différentiant complétement l'équation $f(x,y,z)=0$, on a

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0.$$

Prenant dans cette équation la valeur de $\frac{df}{dx}$ et la sub-

stituant dans l'équation précédente, il viendra

$$(Pdy-Qdx)\frac{df}{dy}+(Pdz-Rdx)\frac{df}{dz}=0.$$

Or, la fonction $f(x,y,z)$ devant contenir une fonction arbitraire des variables x,y,z, il est nécessaire que l'équation précédente soit satisfaite, quelles que soient les valeurs des fonctions $\frac{df}{dy}$ et $\frac{df}{dz}$; d'où l'on conclut que l'on doit avoir séparément les équations

$$Pdy-Qdx=0,$$
$$Pdz-Rdx=0,$$

lesquelles, par l'élimination de dx, donnent

$$Qdz-Rdy=0.$$

Ces trois équations aux différences ordinaires, dont deux quelconques entraînent la troisième, résultent nécessairement de l'existence de l'équation aux différences partielles proposée, et subsistent toujours avec elle. Admettons que de ces équations, ou d'une combinaison quelconque de ces équations, on puisse déduire par l'intégration deux équations primitives contenant chacune une constante arbitraire, et que nous désignerons par

$$M=a \quad \text{et} \quad N=b,$$

a et b étant les deux constantes arbitraires, et M,N des fonctions de x,y,z. On pourra tirer des deux équations $M=a$, $N=b$, les valeurs de x et y en z, et les substituant dans l'équation $f(x,y,z)=0$, où il ne se trouverait plus alors que la variable z avec les constantes arbi-

traires a,b, et d'autres constantes non arbitraires. Mais puisque l'on doit avoir $df=0$, il est nécessaire que la variable z disparaisse de cette équation par suite de la substitution des valeurs de x et de y. Ainsi l'équation $f(x,y,z)=0$ doit se réduire uniquement à une relation entre les quantités a, b; relation que nous pouvons représenter par

$$\Phi(a,b)=0,$$

Φ désignant une fonction entièrement arbitraire. Et comme a et b peuvent être remplacées respectivement par leurs valeurs M et N en fonction de x,y,z, on voit que l'intégrale cherchée sera

$$\Phi(M,N)=0; \qquad \text{ou si l'on veut} \qquad N=\varphi(M),$$

φ désignant aussi une fonction arbitraire

479. Les notions géométriques indiquées dans le n° 474, conduisent au même résultat. Remarquons qu'à l'équation proposée

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=R,$$

se réunit toujours l'équation générale

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy.$$

Eliminant $\frac{dz}{dx}$, ou $\frac{dz}{dy}$, on trouve les deux équations distinctes

$$(Pdy-Qdx)\frac{dz}{dx}=Rdy-Qdz,$$

$$(Pdy-Qdx)\frac{dz}{dy}=Pdz-Rdx,$$

qui doivent nécessairement être satisfaites d'elles-mêmes ; car autrement on en tirerait des valeurs déterminées de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ en x, y, z, ce qui est impossible, puisque l'équation proposée ne peut déterminer la direction du plan tangent en un point donné quelconque, attendu que par ce point on peut faire passer une infinité de surfaces représentées par l'équation proposée.

Donc on a séparément les trois équations

$$Pdy - Qdx = 0,$$
$$Pdz - Rdx = 0,$$
$$Qdz - Rdy = 0,$$

dont deux quelconques entraînent la troisième. Comme les relations exprimées par ces équations dérivent de l'équation différentielle proposée, la courbe à laquelle elles appartiennent, doit résulter de l'intersection de deux des surfaces auxquelles appartient l'équation proposée elle-même ; et par conséquent cette courbe est celle que l'on a désignée dans le n° 474, sous le nom de caractéristique. Si l'on déduit des équations différentielles précédentes ses équations en termes finis, sous la forme

$$M = a, \qquad N = b,$$

elles représenteront toutes les caractéristiques possibles en y faisant varier à volonté les constantes a et b. Mais si l'on regarde b comme une fonction quelconque φ de la quantité a, les deux équations

$$M = a, \qquad N = \varphi(a),$$

ne représenteront plus que la série des caractéristiques qui sera déterminée par la nature de la fonction φ lors-

qu'on fera varier a depuis $-\frac{1}{0}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$. Enfin si l'on élimine a entre ces deux dernières équations, le résultat de cette élimination, qui est

$$N=\varphi(M),$$

appartiendra à la surface lieu de cette série de caractéristiques, c'est-à-dire, vu l'indétermination de la fonction φ, à l'une quelconque des surfaces enveloppes auxquelles appartient l'équation proposée, et qui sont représentées par son intégrale générale.

480. On a supposé, dans ce qui précède, que l'on pourrait intégrer deux des équations de la caractéristique; ou deux équations quelconques résultant de la combison de celle-ci. Cette intégration n'est pas toujours possible, parce que les trois variables x,y,z se trouvent à la fois dans les équations dont il s'agit, tandis qu'elles ne contiennent que les différentielles de deux d'entre elles. Mais l'on peut toujours néanmoins concevoir l'intégrale générale déduite de ces équations sous la forme à laquelle on est parvenu dans les numéros précédents. En effet, si l'on considère deux de ces équations, telles que

$$Pdz-Rdx=0,$$
$$Qdz-Rdy=0,$$

on remarquera que puisqu'elles appartiennent à une courbe, on ne peut plus y regarder qu'une seule des variables comme indépendante. Prenons, par exemple, z pour variable indépendante : ces deux équations contiendront, outre les variables x,y,z, l'une $\frac{dx}{dz}$,

l'autre $\frac{dy}{dz}$. Différentiant la première on aura une équation du second ordre contenant $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ et $\frac{d^2x}{dz^2}$. On a donc maintenant trois équations entre lesquelles on peut éliminer y et $\frac{dy}{dz}$: le résultat de l'élimination sera une équation aux différences ordinaires du second ordre entre les variables x et z seules.

Cette équation, conformément à ce qu'on a vu n° 474, a nécessairement deux intégrales du premier ordre ayant chacune une constante arbitraire. Admettons que l'on obtienne ces intégrales qui contiendront toutes deux $\frac{dx}{dz}$. On pourra éliminer cette fonction au moyen de l'équation $P-R\frac{dx}{dz}=0$, et il restera par conséquent deux équations contenant chacune les variables x,y,z et une constante arbitraire. Mettant ces deux équations sous la forme

$$M=a, \qquad\qquad N=\varphi(a),$$

elles donneront comme ci-dessus pour l'intégrale cherchée

$$N=\varphi(M).$$

On voit par là que l'intégration de l'équation linéaire aux différences partielles du premier ordre se ramène toujours à l'intégration d'une équation aux différences ordinaires du second ordre à deux variables.

481. La méthode exposée dans le n° 478, s'applique également aux cas où l'équation aux différences partielles proposée contient un plus grand nombre de variables.

Si cette équation est

$$P\frac{dv}{dx}+Q\frac{dv}{dy}+R\frac{dv}{dz}=T,$$

nous représenterons son intégrale générale par

$$f(v,x,y,z)=0.$$

En la différentiant successivement par rapport aux variables x,y,z, on en déduira

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dv}},\quad \frac{dv}{dy}=-\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dv}},\quad \frac{dv}{dz}=-\frac{\frac{df}{dz}}{\frac{df}{dv}},$$

ce qui donne, en mettant ces valeurs dans l'équation primitive

$$T\frac{df}{dv}+P\frac{df}{dx}+Q\frac{df}{dy}+R\frac{df}{dz}=0.$$

On a d'ailleurs, en faisant varier d'une manière quelconque les variables v,x,y,z,

$$\frac{df}{dv}dv+\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0.$$

Eliminant $\frac{df}{dv}$ entre cette dernière équation et la précédente, on trouvera

$$(Tdx-Pdv)\frac{df}{dx}+(Tdy-Qdv)\frac{df}{dy}+(Tdz-Rdv)\frac{df}{dz}=0,$$

équation qui sera satisfaite sans déterminer la fonction f, si l'on pose

$$Tdx-Pdv=0,$$
$$Tdy-Qdv=0,$$
$$Tdz-Rdv=0;$$

d'où résultent les trois autres équations

$$Pdy - Qdx = 0,$$
$$Pdz - Rdx = 0,$$
$$Qdz - Rdy = 0.$$

Ces équations aux différences ordinaires établissent donc entre les variables v, x, y, z, les relations nécessaires pour que la fonction primitive $f(v, x, y, z)$ ait sa différentielle coustamment nulle, ou ne puisse contenir que des constantes. Si donc on trouve pour trois quelconques des équations dont il s'agit, trois intégrales telles que

$$L = a, \qquad M = b, \qquad N = c,$$

a, b, c désignant les constantes arbitraires, la substitution dans $f(v, x, y, z)$, des valeurs des trois variables déduites de ces intégrales fera nécessairement disparaître la quatrième, en sorte que cette fonction deviendra une fonction de a, b, c que nous désignerons par

$$\Phi(a, b, c).$$

Mettant ensuite pour a, b, c leurs valeurs en v, x, y, z, on aura pour l'intégrale demandée l'équation

$$\Phi(L, M, N) = 0, \qquad \text{ou} \qquad N = \varphi(L, M).$$

On opérerait d'une manière semblable si le nombre des variables indépendantes était plus considérable.

482. On doit distinguer le cas où un terme manque dans l'équation aux différences partielles

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R,$$

parce qu'alors l'intégration ne dépend plus que de celle

d'une équation aux différences ordinaires du premier ordre.

Supposons, par exemple, que le premier terme manque, ou que l'on ait P=0. Les équations de la caractéristique des n°s 478 et 479, se réduisent à

$$dx=0,$$
$$Qdz-Rdy=0.$$

La première donne

$$x=a,$$

a désignant une constante arbitraire, ce qui indique que la caractéristique se trouve constamment dans un plan perpendiculaire à l'axe des x. x étant constante, on ne regardera plus comme variables dans la seconde équation que y et z. Soit

$$N=\varphi(a),$$

l'intégrale de cette équation. Mettant x à la place de a dans le second membre, l'intégrale cherchée sera donc

$$N=\varphi(x).$$

483. Nous pouvons appliquer la méthode précédente aux cas simples traités n°s 476 et 477. Dans le cas du n° 476, P et Q sont constantes, et R=0. Les équations de la caractéristique deviennent

$$Pdy-Qdx=0,$$
$$dz=0.$$

Leurs intégrales sont

$$Py-Qx=a,$$
$$z=\varphi(a).$$

L'intégrale générale cherchée est donc, conformément à ce qu'on a vu dans le n° 478, et comme on l'a trouvée n° 475,

$$z=\varphi(Py-Qx).$$

484. Dans le cas du n° 477, l'équation proposée étant

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=z,$$

P et Q sont constantes et $R=z$. Les équations de la caractéristique deviennent

$$Pdy-Qdx=0,$$
$$Pdz-zdx=0,$$
$$Qdz-zdy=0.$$

Elles s'intègrent toutes trois, et donnent pour intégrales

$$Py-Qx=a,$$

$$Plz-x=const. \qquad \text{ou} \qquad z.e^{-\frac{x}{P}}=b,$$

$$Plz-y=const. \qquad\qquad z.e^{-\frac{y}{Q}}=c,$$

$a,b,c,$ désignant trois constantes arbitraires. Ainsi, conformément à ce qu'on a vu n° 478, on pourra prendre pour l'intégrale cherchée

$$z.e^{-\frac{x}{P}}=\varphi(Py-Qx) \qquad \text{ou} \qquad z.e^{-\frac{y}{Q}}=\psi(Py-Qx),$$

φ et ψ désignant toujours des fonctions arbitraires, ce qui s'accorde avec le résultat obtenu d'une autre manière n° 477. Quant à la troisième équation qui résulterait de la combinaison de la seconde des deux équations de la caractéristique avec la troisième, et qui serait

$$z.e^{-\frac{y}{Q}}=\varpi\left(z.e^{-\frac{x}{P}}\right),$$

ϖ étant le signe d'une fonction arbitraire, elle est comprise dans les deux autres, et ne donne rien de plus. En

effet, celles-ci indiquant que $z.e^{-\frac{x}{P}}$ et $z.e^{-\frac{y}{Q}}$ sont toutes deux fonctions de la même quantité $Py—Qx$, il en résulte nécesairement que les deux quantités dont il s'agit, sont fonctions l'une de l'autre. On a déjà remarqué d'ailleurs que ces deux premières équations expriment la même chose, et équivalent entièrement l'une à l'autre.

485. Soit, par exemple, l'équation très-simple

$$y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0.$$

Les équations de la caractéristique se réduisent à

$$\begin{aligned} ydy+xdx&=0, \qquad \text{d'où} \qquad y^2+x^2=a, \\ dz&=0, \qquad\qquad\qquad z=\varphi a. \end{aligned}$$

L'intégrale de l'équation proposée est donc

$$z=\varphi(x^2+y^2),$$

φ désignant une constante arbitraire. En effet, l'équation $y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0$ étant considérée dans la géométrie, exprime que la projection sur le plan des xy de la normale à la surface à laquelle appartient cette équation passe toujours par l'origine des coordonnées ; ou, si l'on veut, que la normale rencontre toujours l'axe des z. Cette propriété convient à toute surface de révolution dont l'axe coïncide avec l'axe des z, et ne convient qu'à une surface de ce genre. Or, il est visible que l'équation primitive $z=\varphi(x^2+y^2)$ exprimant que l'ordonnée ne varie pas lorsque la quantité x^2+y^2 demeure constante, ou que l'intersection de la surface par un plan

perpendiculaire à l'axe des z est un cercle, appartient également à toute surface de révolution décrite autour de l'axe des z par une ligne quelconque. Cette équation a le même degré de généralité que l'équation différentielle.

Une équation analogue à l'équation désignée par $F(x,y,z,a,b)=0$ dans le n° 472, est ici

$$x^2+y^2+(z-a)^2=b^2,$$

qui représente une surface sphérique quelconque dont le centre est placé dans l'axe des z. Si l'on prend en effet, les deux équations aux différences partielles du premier ordre, qui seront

$$x+(z-a)\frac{dz}{dx}=0, \qquad y+(z-a)\frac{dz}{dy}=0,$$

ce qui fait disparaître immédiatement la constante b, et si l'on élimine entre elles la constante a, on trouvera l'équation proposée $y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0$. Mais cette dernière équation n'appartient pas seulement à toute sphère dont le centre est placé sur l'axe des z. Elle appartient également à toute surface enveloppe des positions successives qu'occuperait une sphère dont le centre se déplacerait sur l'axe des z par la variation de la constante a, et dont le rayon b varierait en même temps suivant une loi quelconque exprimée par la relation $b=\varphi(a)$. Cette surface enveloppe, qui serait donnée par l'élimination de a entre les deux équations

$$x^2+y^2+(z-a)^2=\varphi(a), \qquad -2(z-a)=\frac{d.\varphi(a)}{da},$$

après la détermination de la fonction φ, serait évidemment une surface de révolution dont l'axe coïnciderait avec l'axe des z. D'ailleurs la seconde des équations précédentes donne évidemment z fonction de a, ou $a = \mathrm{F}(z)$. Mettant pour a cette valeur dans la première, on en déduira comme ci-dessus, $z = \Phi(x^2+y^2)$.

On peut aussi regarder comme une intégrale particulière de l'équation aux différences partielles proposée l'équation

$$x^2+y^2-a^2(z-b)^2=0,$$

qui représente la surface d'un cône droit quelconque dont l'axe coïncide avec l'axe des z. La constante b est l'ordonnée du centre du cône, et la constante a la tangente de l'angle compris entre l'axe des z et l'arête. En différentiant successivement par rapport à x et à y, il vient

$$x-a^2(z-b)\frac{dz}{dx}=0, \qquad y-a^2(z-b)\frac{dz}{dy}=0,$$

équations qui, par l'élimination des constantes a et b, donnent $y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0$. L'enveloppe des positions successives qu'occuperait le cône en faisant varier a dans l'équation $x^2+y^2-a^2[z-\varphi(a)]^2=0$ est évidemment une surface de révolution autour de l'axe des z dont la figure dépend de la fonction φ, et à laquelle appartiendra également l'équation différentielle proposée. L'équation de cette surface de révolution se trouvera en éliminant a entre les deux équations

$$x^2+y^2-a^2[z-\varphi(a)]^2=0, \quad \text{et} \quad z-\varphi(x)+a\frac{d.\varphi(a)}{da}=0.$$

Or, la seconde indique que z est une fonction quelcon-

que de a, et par conséquent a une fonction quelconque de z : d'où l'on voit par la première que z doit être une fonction quelconque de x^2+y^2, comme on l'a trouvé ci-dessus.

486. Considérons encore l'équation

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=z.$$

Les équations de la caractéristique seront

$$xdy-ydx=0,$$
$$xdz-zdx=0,$$
$$ydz-zdy=0.$$

Toutes trois sont immédiatement intégrables, et on trouve en les intégrant

$$\frac{y}{x}=a, \qquad \frac{z}{x}=b, \qquad \frac{z}{y}=c,$$

a, b, c designant toujours des constantes arbitraires. On peut donc prendre pour l'intégrale de l'équation proposée l'une ou l'autre des trois équations

$$\frac{z}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \frac{z}{y}=\psi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \frac{z}{y}=\varpi\left(\frac{z}{x}\right),$$

dont la troisième est comprise dans les deux premières. Ainsi l'intégrale générale se forme ici de l'une ou de l'autre des expressions

$$z=x.\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad z=y.\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dans la géométrie, l'équation proposée

$$x\frac{dz}{dy}+y\frac{dz}{dx}-z=0,$$

exprime que les plans tangents à la surface à laquelle appartient cette équation passent tous par l'origine des coordonnées, propriété qui convient à toute surface conique dont cette origine est le centre ou sommet, et qui ne convient qu'à ces surfaces. Or, il est visible que les équations $\frac{z}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ou $\frac{z}{y}=\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ caractérisent également les surfaces dont il s'agit, puisqu'elles expriment que les rapports $\frac{z}{x}$ ou $\frac{z}{y}$ demeurent constants en même temps que le rapport $\frac{y}{x}$; ou si l'on veut, que tout plan passant par l'axe des z coupe la surface suivant une ligne droite.

L'équation analogue à l'équation $F(x,y,z,a,b)=0$ du n° 472, est ici

$$ax+by-z=0,$$

qui appartient à un plan quelconque passant par l'origine des coordonnées, lorsqu'on y regarde a et b comme des constantes arbitraires. Ses deux équations différentielles du premier ordre sont

$$a-\frac{dz}{dx}=0, \qquad \text{et} \qquad b-\frac{dz}{dy}=0,$$

et donnent par l'élimination de a et b l'équation proposée; cette équation appartient non-seulement à ce plan, mais à toute surface enveloppe de l'espace que le plan parcourrait en le faisant mouvoir par la variation des constantes a et b, sans qu'il cessât de passer par l'origine des coordonnées, surface qui serait évidemment une surface conique dont l'origine des coordonnées serait le centre. On en aurait l'équation en prenant $b=\varphi(a)$, et éliminant a entre les deux équations

$$ax+\varphi(a)\,y-z=0 \qquad \text{et} \qquad x+\frac{d.\varphi(a)}{da}.y=0.$$

Or, la seconde donne $\frac{x}{y}=$ *fonction* de a, ou $a=$ *fonction* de $\frac{x}{y}$. On déduira donc de la première $\frac{z}{y}=$ *fonction* de $\frac{x}{y}$, conformément à ce qu'on a trouvé ci-dessus.

XXXVIII. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES, LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS, D'UN ORDRE QUELCONQUE.

487. Ces équations méritent une attention particulière, parce que c'est par leur moyen que les géomètres ont exprimé, dans les cas les plus simples, et que l'on peut appeler normaux, les lois générales des principaux phénomènes dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle. Elles ont pour caractère propre de pouvoir toujours être satisfaites par une infinité de solutions particulières, comprises dans une même formule, que l'on peut regarder comme une sorte de type analytique, auquel appartient la propriété dont l'équation différentielle est l'expression. L'ensemble de ces solutions donne sur-le-champ une intégrale générale dans laquelle il se trouve des quantités arbitraires, qu'il s'agit de déterminer ensuite d'une manière conforme aux conditions spéciales appartenant à chaque question.

Considérons, par exemple, l'équation du second ordre suivante entre les deux variables indépendantes x, y et la variable z supposée fonction des deux autres,

$$P\frac{d^2z}{dx^2}+Q\frac{d^2z}{dxdy}+R\frac{d^2z}{dy^2}+S\frac{dz}{dx}+T\frac{dz}{dy}+z=0,$$

dans laquelle P,Q,R,S,T représentent des quantités constantes quelconques. Nous aurons ici pour la valeur particulière qui satisfait à cette équation

$$z=e^{mx+ny},$$

m,n désignant des constantes, pourvu que ces constantes satisfassent elles-mêmes à l'équation de condition

$$Pm^2+Qmn+Pn^2+Sm+Tn+1=0;$$

et comme cette équation permet de prendre arbitrairement l'une des deux quantités m ou n, on voit qu'il existe une infinité de systèmes de valeurs réelles ou imaginaires qui peuvent être attribuées à ces deux quantités, avec la condition de rendre l'expression $z=e^{mx+ny}$ propre à vérifier l'équation proposée.

Cette équation serait également vérifiée par la somme d'un nombre quelconque de valeurs semblables à la précédente, affectées chacune de coefficients constants quelconques. On peut donc écrire

$$z=Ae^{mx+ny}+A_1e^{m_1x+n_1y}+A_2e^{m_2x+n_2y}+\text{etc.},$$

et cette expression sera l'intégrale générale de l'équation proposée, si la série comprend tous les systèmes en nombre infini de valeurs de m et n qui satisfont ensemble à l'équation de condition précédente. Les coefficients constants A, A_1, A_2, etc., restent entièrement arbitraires. Cette expression de z doit être regardée comme ayant le même degré de généralité que l'équation différentielle elle-même.

Ces notions peuvent évidemment être étendues à toute équation différentielle du même genre, quel que

soit le nombre des variables indépendantes et l'ordre de l'équation.

488. Les questions qui ont été résolues par l'intégration des équations aux différences partielles, appartenaient principalement à la théorie du mouvement de la chaleur, ou à la mécanique. Dans les premières, la température d'un point donné d'un corps est regardée comme une fonction du temps et des trois coordonnées de ce point. L'équation différentielle exprime certaines relations qui doivent subsister entre les coefficients différentiels partiels de cette fonction, relations qui dérivent immédiatement du principe de la communication de la chaleur et qui sont communes à toutes les questions. L'intégrale doit satisfaire à ces relations, et de plus à certaines conditions particulières, qui dépendent de la figure du corps, du mode d'échauffement ou de refroidissement, enfin de l'état initial des températures des divers points. Dans les questions de mécanique, où l'on considère le mouvement d'un système de corps, on regarde les coordonnées variables des points qui se déplacent, comme des fonctions du temps et de leurs coordonnées initiales. Les équations différentielles expriment les lois générales du mouvement. Les intégrales doivent satisfaire à ces équations, aux conditions particulières du système, et représenter, quand on y suppose le temps nul, l'état initial de repos ou de mouvement dans lequel ce système se trouvait à l'instant d'où le temps est compté. Pour donner, dans les cas les plus simples, une idée de la manière dont ces intégrales se forment, on considérera les questions suivantes.

489. Concevons, comme dans le n° 448, une barre

cylindrique ou prismatique dont les dimensions transversales sont très-petites. Admettons que cette barre, d'une longueur déterminée, ait été primitivement échauffée d'une manière quelconque, puis placée dans un milieu dont la température constante est zéro, et que ses deux extrémités soient aussi maintenues constamment, par une cause quelconque, à la température zéro. Il s'agit, l'état de température initial de la barre étant donné, de connaître les variations que subiront avec le temps les températures des divers points, jusqu'à ce que l'excès de chaleur qui lui avait été communiqué s'étant dissipé dans le milieu environnant, ces températures aient été toutes réduites à la température même du milieu. On nommera

Ω l'aire de la section transversale de la barre;

γ le périmètre de cette section;

x la distance d'une section quelconque à l'une des extrémités;

v la température qui a lieu dans cette section à la fin du temps t;

a la longueur de la barre;

K, h les conducibilités intérieure et extérieure;

C la chaleur spécifique;

D le poids de l'unité de volume.

La chaleur passe des parties les plus échauffées de la barre dans celles qui le sont le moins, en même temps qu'elle se dissipe, soit dans l'air environnant en traversant la surface de la barre, soit en s'écoulant par les deux extrémités maintenues à la température zéro. Si l'on considère l'élément du prisme dont la longueur

est dx, et dont le volume est $\Omega\, dx$, on reconnaît que la température de cet élément s'élevant de $\frac{dv}{dt}\,dt$ dans le temps dt, l'excès de la chaleur qu'il reçoit sur celle qu'il perd dans le même temps, doit être $\mathrm{CD}.\Omega dx\,\frac{dv}{dt}\,dt$. Or, la chaleur qu'il reçoit dans le temps dt par sa première extrémité est $-\mathrm{K}.\Omega\frac{dv}{dt}\,dt$; celle qu'il transmet par l'extrémité opposée est $-\mathrm{K}.\Omega\left(\frac{dv}{dt}+\frac{d^2v}{dx^2}dx\right)dt$; et celle qu'il perd au travers de sa surface est $h.\gamma dx.v dt$: d'où il suit que la chaleur qui reste dans l'élément est $\left(\mathrm{K}.\Omega\,\frac{d^2v}{dx^2}-h\gamma.v\right)dxdt$. Egalant cette quantité de chaleur à celle qui est nécessaire pour produire l'élévation de température qui a lieu dans cet élément, il vient

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CD}}\,\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{h\gamma}{\Omega}\,v,$$

pour l'équation aux différences partielles qui exprime la loi du mouvement de la chaleur dans la barre.

Cette équation devient plus simple en posant $v=u^{-\frac{h\gamma}{\Omega}t}$, u désignant une nouvelle variable : elle se réduit alors, en écrivant pour abréger k à la place de $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CD}}$, à

$$\frac{du}{dt}=k\,\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Conformément à ce qu'on a vu dans le n° 487, on y satisfera par la valeur particulière $u=e^{mx+nt}$, pourvu que

les constantes m et n vérifient l'équation $n=km^2$. Ainsi l'intégrale générale est

$$u=Ae^{mx+km^2t}+A_1e^{m_1x+km_1^2t}+A_2e^{m_2x+km_2^2t}+\text{etc.},$$

dans laquelle les constantes m, m_1, m_2, etc., et A, A_1, A_2, etc., sont entièrement indéterminées.

490. Cette intégrale, aussi bien que l'équation *différentielle*, appartient à toutes les questions où *il s'agit* du mouvement de la chaleur dans une barre prismatique dont les dimensions transversales sont très-petites, placée dans un milieu dont la température est constante. Elle doit satisfaire dans la question dont il s'agit ici aux deux conditions suivantes : 1° que la valeur de v, et par conséquent celle de u, soient toujours nulles aux points extrêmes de la barre, c'est-à-dire pour les valeurs $x=0, x=a$; 2° qu'en supposant $t=0$ l'expression de v s'accorde avec l'état initial des températures, que l'on doit supposer donné sous cette forme $v=\varphi(x)$, φ désignant une fonction entièrement arbitraire.

L'expression précédente ne satisfera pas à la condition de donner $u=0$ pour les valeurs $x=0$ et $x=a$, en prenant pour les nombres m, m_1, m_2, etc., des valeurs réelles. Mais en leur attribuant des valeurs imaginaires $m\sqrt{-1}$, $m_1\sqrt{-1}$, $m_2\sqrt{-1}$, etc., et remplaçant chaque exponentielle imaginaire par sa valeur en sinus et cosinus d'arcs réels, on aura, au lieu de cette expression, la formule

$$u=(A\sin.mx+B\cos.mx)e^{-km^2t}+(A_1\sin.m_1x+B_1\cos.m_1x)e^{-km_1^2t}$$
$$+(A_2\sin.m_2x+B_2\cos.m_2x)e^{-km_2^2t}+\text{etc.};$$

dans laquelle on doit, pour lui conserver toute la géné-

ralité qu'elle comporte, donner des coefficients aux termes $\sin.mx.e^{-km^2t}$, $\cos.mx.e^{-km^2t}$, et ainsi des autres, parce que ces termes vérifient séparément, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, l'équation différentielle $\frac{du}{dt}=k\frac{d^2u}{dx^2}$. Mais dans le cas particulier dont il s'agit, nous devons nécessairement supposer nuls tous les coefficients B, B_1, B_2, etc., puisque les termes qu'ils affectent ne peuvent se réduire à zéro lorsque l'on suppose $x=0$; et nous devons prendre simplement la partie de l'intégrale qui s'accorde avec cette condition; savoir :

$$u=A\sin.mx.e^{-km^2t}+A_1\sin.m_1x.e^{-km_1^2t}+A_2\sin.m_2x.e^{-km_2^2t}+\text{etc.}$$

Pour satisfaire ensuite à cette autre condition que $u=0$ lorsque $x=a$, il suffira de choisir, pour les nombres m, m_1, m_2, etc., des multiples exacts de la demi-circonférence divisée par a. Nous écrirons donc

$$u=A_1\sin.\frac{\pi x}{a}.e^{-\frac{k\pi^2}{a^2}t}+A_2\sin.\frac{2\pi x}{a}.e^{-\frac{k.2^2\pi^2}{a^2}t}+A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}.e^{-\frac{k.3^2\pi^2}{a^2}t}+\text{etc.};$$

et en concevant cette série prolongée à l'infini, le résultat présentera toute la généralité possible, avec les conditions que l'expression de u satisfasse à l'équation différentielle et donne $u=0$ lorsque $x=0$ et $x=a$.

491. Il reste à satisfaire à la condition qu'en faisant $t=0$, ce qui donne $v=u$, et

$$u=A_1\sin.\frac{\pi x}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}+A_4\sin.\frac{4\pi x}{a}+\text{etc.},$$

la série du second membre, prolongée à l'infini, reproduise la valeur de la fonction donnée et arbitraire $\varphi(x)$,

par laquelle on suppose l'état initial des températures représenté ; c'est-à-dire que les coefficients A_1, A_2, A_3, etc., qui restent encore arbitraires, doivent être déterminés par la condition que l'équation

$$\varphi(x)=A_1\sin.\frac{\pi x}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}+A_4\sin.\frac{4\pi x}{a}+\text{etc}\ldots,\quad (A)$$

subsiste pour une valeur quelconque de la variable x comprise entre $x=0$ et $x=a$.

Concevons que l'on ait partagé la longueur a de la barre en un nombre $n-1$ de parties, n étant un nombre entier très-grand, et qui tend à devenir infini, et désignons par $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ les abscisses des points de division. On posera les équations

$$\varphi(x_1)=A_1\sin.\frac{\pi x_1}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x_1}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x_1}{a}+\ldots\ldots+A_n\sin.\frac{n\pi x_1}{a},$$

$$\varphi(x_2)=A_1\sin.\frac{\pi x_2}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x_2}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x_2}{a}+\ldots\ldots+A_n\sin.\frac{n\pi x_2}{a},$$

$$\varphi(x_3)=A_1\sin.\frac{\pi x_3}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x_3}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x_3}{a}+\ldots\ldots+A_n\sin.\frac{n\pi x_3}{a},$$

. . . .

. . . .

$$\varphi(x_n)=A_1\sin.\frac{\pi x_n}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x_n}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x_n}{a}+\ldots\ldots+A_n\sin.\frac{n\pi x_n}{a},$$

qui doivent toutes subsister, et d'où l'on peut déduire les valeurs des coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$. Pour opérer l'élimination qui donnera la valeur du coefficient A_i appartenant au terme $A_i \sin.\frac{i\pi x}{a}$, on multipliera la première des équations précédentes par $\frac{a}{n+1}\sin.\frac{i\pi x_1}{a}$,

la seconde par $\frac{a}{n+1}\sin.\frac{i\pi x_2}{a}$, la troisième par $\frac{a}{n+1}\sin.\frac{i\pi x_3}{a}$, etc., enfin la dernière par $\frac{a}{n+1}\sin.\frac{i\pi x_n}{a}$. On ajoutera ensuite toutes ces équations. Or, il est visible que le nombre n étant supposé infiniment grand, l'intervalle $\frac{a}{n+1}$ devient l'élément infiniment petit dx; et

1° la somme des premiers membres ne diffère point de l'intégrale définie $\int_0^\infty dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}\varphi(x)$.

2° Si l'on désigne par $A_j \sin\frac{j\pi x}{a}$ un terme quelconque du second membre de l'équation (A), la somme des termes correspondants dans les équations précédentes ne diffère point de $A_j\int_0^\infty dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}\sin.\frac{j\pi x}{a}$.

3° Enfin la somme des termes contenant le coefficient A_i est $A_i\int_0^\infty dx.\sin^2.\frac{i\pi x}{a}$.

Remarquons maintenant que l'intégrale définie

$$\int_0^\infty dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}.\sin.\frac{j\pi x}{a},$$

est nulle tant que les nombres i et j sont des nombres entiers différents l'un de l'autre, puisque cette intégrale revient à

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty dx\left[\cos.\frac{(i-j)\pi x}{a}-\cos.\frac{(i+j)\pi x}{a}\right].$$

Mais si les nombres i et j sont égaux, ou s'il s'agit de l'intégrale

$$\int_0^\infty dx.\sin.^2\frac{i\pi x}{a},$$

on trouve pour sa valeur $\frac{a}{2}$. Ainsi l'opération précédente a fait disparaître tous les termes, hors un seul, et il reste pour déterminer le coefficient cherché, l'équation

$$\int_0^\infty dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}.\varphi(x)=A_i\frac{a}{2};$$

d'où l'on déduit

$$A_i=\frac{2}{a}\int_0^\infty dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}.\varphi(x),$$

pour l'expression d'un coefficient quelconque dans le second membre de l'équation (A). Chacun de ces coefficients est donné par une intégrale définie sous le signe de laquelle entre la fonction arbitraire $\varphi(x)$. Cette intégrale représente l'aire d'une courbe que l'on forme en multipliant, dans l'intervalle compris entre $x=0$ et $x=a$, les ordonnées correspondantes des deux courbes qui seraient représentées par les équations $y=\varphi(x)$ et $y=\sin.\frac{i\pi x}{a}$: elle peut toujours être calculée, pourvu que l'ordonnée n'ait pas de valeurs infinies dans cet intervalle, circonstance qui n'a jamais lieu dans les questions physiques auxquelles s'applique cette analyse.

L'équation (A) devient donc (en mettant sous le signe des intégrales définies une autre variable α à la place de x),

$$\varphi(x)=\frac{2}{a}\left[\sin.\frac{\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha)+\sin.\frac{2\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{2\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha)\right.$$
$$\left.+\sin.\frac{3\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{3\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha)+\text{etc.}\right].$$

que l'on peut écrire, pour abréger

$$\varphi(x)=\frac{2}{a}\mathbf{S}_{i=1}^{i=\infty}\sin.\frac{i\pi x}{a}\int_0^a dz\sin.\frac{i\pi z}{a}.\varphi(z),$$

i désignant un nombre entier quelconque. On prouve d'ailleurs qu'une telle série est nécessairement convergente, quelle que soit la fonction arbitraire $\varphi(x)$, c'est-à-dire que la somme des termes, à mesure que l'on en prend un plus grand nombre, approche toujours d'une limite déterminée, qui est la valeur du premier membre, pourvu que l'on ne donne à la variable x que des valeurs comprises entre o et a*. Au delà de cet intervalle le second membre de l'équation affecte des valeurs périodiques, qui ne s'accordent plus en général avec celles que pourrait donner la fonction arbitraire $\varphi(x)$.

Il ne sera pas inutile de remarquer qu'il ne peut être permis d'omettre dans le second membre de l'équation (A), un seul des termes appartenant à la série des sinus des arcs égaux à la demi-circonférence multipliée par un nombre entier quelconque; car cette omission ôterait à l'intégrale cherchée la généralité nécessaire, l'intégrale devant toujours comprendre, sans aucune exception, toutes les expressions analytiques qui satisfont à l'équation différentielle et aux conditions particulières de la question. C'est ce qui devient manifeste en remarquant que si l'on omettait, par exemple, le terme $A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}$, on trouverait alors en multipliant les deux membres de l'équation (A) par $dx.\sin.\frac{3\pi x}{a}$, et intégrant ensuite depuis

* Voyez la note à la fin de l'article.

$x=0$ jusqu'à $x=a$, le résultat $\int_0^a dx.\sin.\frac{3\pi x}{a}.\varphi(x)=0$, résultat qui ne peut évidemment subsister en général, mais seulement pour certaines formes particulières de la fonction $\varphi(x)$.

492. D'après ce qui précède, la température variable v des différents points de la barre se trouvera donc exprimée par la formule

$$v=\frac{2}{a}.e^{-\frac{h\gamma}{\Omega}t}.\sum_{i=1}^{i=\infty}\sin.\frac{i\pi x}{a}.e^{-\frac{K}{CD}\frac{i^2\pi^2}{a^2}t}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{i\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha),$$

qui résout entièrement la question proposée. Elle indique la manière dont la chaleur se propage et se répartit dans la barre. Les termes successifs de la série sont affectés des facteurs $e^{-\frac{K}{CD}\frac{\pi^2}{a^2}t}$, $e^{-\frac{K}{CD}\frac{2^2\pi^2}{a^2}t}$, $e^{-\frac{K}{CD}\frac{3^2\pi^2}{a^2}}$, etc., qui se réduisent tous à l'unité quand $t=0$, mais qui, lorsque t augmente, prennent des valeurs très-inégales, décroissant d'autant plus rapidement à partir du premier terme que le temps t est plus grand. Il en résulte qu'à mesure que le temps s'écoule, les derniers termes de la série disparaissent successivement, et que bientôt elle peut être réduite à ses deux premiers termes, ou même à son premier terme seul; en sorte que l'on a simplement

$$v=\frac{2}{a}.e^{-\left(\frac{h\gamma}{\Omega}+\frac{K}{CD}\frac{\pi^2}{a^2}\right)t}.\sin.\frac{\pi x}{a}\int_0^a d\alpha.\sin.\frac{\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha).$$

Ainsi quelque arbitraire et irrégulier que puisse être l'état initial de la température, elle tend rapidement à se rapprocher de la distribution indiquée par cette expression, c'est-à-dire d'un état tel que les tempéra-

tures des divers points sont proportionnels aux sinus des arcs compris dans la demi-circonférence. Ces rapports une fois établis ne s'altèrent pas. Les températures de tous les points s'abaissent à la fois en conservant les mêmes proportions, et ce n'est à la rigueur qu'après un temps infini que tout l'excès de la chaleur qui avait été donné à la barre étant dissipé, chacun des points est amené à la température zéro du milieu dans laquelle elle est placée.

493. On reconnaît d'ailleurs que la solution précédente, par cela seule qu'elle représente l'état initial et satisfait à l'équation différentielle, est la seule qui puisse être obtenue, et que toute autre solution ne pourrait en différer. En effet, lorsque le premier état $v_0=\varphi(x)$ des températures est donné, l'équation différentielle faisant connaître la valeur du coefficient $\frac{dv}{dt}$, détermine la température $v_0+\frac{dv_0}{dt}\Delta t=v_1$ qui a lieu après le temps Δt pour un point quelconque, avec une exactitude d'autant plus grande que Δt est plus petit. Elle déterminera également les températures $v_2=v_1+\frac{dv_1}{dt}\Delta t, v_3=v_2+\frac{dv_2}{dt}\Delta t$, etc., qui auront lieu après les temps $2\Delta t$, $3\Delta t$, etc., Or, l'expression précédente donnant $v=v_0$ lorsque $t=0$, et satisfaisant à l'équation différentielle donnera évidemment en y supposant $t=\Delta t, =2\Delta t, =3\Delta t$, etc., les mêmes valeurs v_1, v_2, v_3, etc. (l'intervalle Δt étant supposé, comme on doit le faire, infiniment petit). Ainsi la solution est unique, et nécessairement exprimée par la formule précédente.

494. Nous considérerons maintenant la question du mouvement de vibration d'une corde tendue entre deux points fixes. On suppose que cette corde ait été dérangée d'une manière quelconque de sa figure naturelle rectiligne, et que l'on ait imprimé des vitesses quelconques à tous ses points : il s'agit de déterminer les mouvements qu'ils affecteront. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que ces mouvements s'opèrent dans *un plan*, et de plus, que les écarts de chaque point à partir de la ligne droite tracée d'une extrémité fixe à l'autre, sont très-petits, en sorte que l'on peut négliger les puissances supérieures des nombres qui les représentent. On désignera par

x l'abscisse d'un point quelconque de la courbe affectée par la corde, à la fin du temps t ;

y l'ordonnée du même point ;

a la longueur de la corde entre ses deux extrémités fixes ;

p le poids de la corde pour l'unité de longueur ;

P un poids égal à la force avec laquelle la corde a été tendue ;

g la vitesse imprimée aux corps pesants par la gravité dans l'unité de temps.

Le mouvement de chaque élément de la longueur de la corde, dont le poids peut être exprimé par pdx, et la masse par $\frac{p}{g}dx$, peut être déterminé en considérant cet élément comme un point matériel libre, pourvu que l'on ait égard aux forces qui le sollicitent par l'effet de sa liaison avec les autres parties de la corde. Or, si l'on

veut déterminer le mouvement de l'élément dans le sens des y, on considérera qu'à la fin du temps t, cet élément est sollicité à sa première extrémité, en vertu de cette liaison, parallèlement aux y, par la composante $P\frac{dy}{dx}$ de la tension P de la corde, qui tend à le rapprocher de l'axe des x; et à sa seconde extrémité par cette même composante augmentée de sa différentielle, savoir,

$$P\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx}\right),$$

qui tend à l'éloigner du même axe. Donc l'élément est sollicité dans le sens de l'ordonnée y par la différence de ces deux forces, qui est $P\frac{d^2y}{dx}$, et par conséquent la loi de son mouvement est exprimée par l'équation

$$\frac{pdx}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=P\frac{d^2y}{dx}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{gP}{p}\frac{d^2y}{dx^2},$$

qui doit subsister pour tous les points de la corde.

495. En cherchant, conformément au n° 487, à satisfaire à cette équation par la valeur particulière $y=te^{mx+nt}$, on reconnaît que les quantités m et n sont assujetties à la condition

$$n^2=k^2m^2, \qquad \text{d'où} \qquad n=\pm km,$$

en écrivant pour abréger k au lieu de $\sqrt{\frac{gP}{p}}$. On peut donc prendre $y=e^{m(x+kt)}$ et $y=e^{m(x-kt)}$, la valeur de m demeurant arbitraire. D'où l'on conclut que l'intégrale générale de l'équation précédente est exprimée par

$$y=Ae^{m(x+kt)}+A_1e^{m_1(x+kt)}+A_2e^{m_2(x+kt)}+\text{etc.}$$
$$+Be^{n(x-kt)}+B_1e^{n_1(x-kt)}+B_2e^{n_2(x-kt)}+\text{etc.},$$

les constantes m, m_1, m_2, etc., n, n_1, n_2, etc. étant entièrement arbitraires, aussi bien que A, A_1, A_2, etc.; B, B_1, B_2, etc.

Afin que ces constantes soient déterminées maintenant d'une manière conforme aux conditions de la question proposée, il faut en premier lieu que la valeur de y soit nulle aux deux extrémités fixes de la corde, c'est-à-dire lorsque $x=0$ et $x=a$, ce qui exige que l'on attribue des valeurs imaginaires aux constantes m, m_1, m_2, etc., et n, n_1, n_2, etc., ou que l'on remplace $e^{m(x+kt)}$ par

$$\cos.m(x+kt)+\sqrt{-1}\sin.m(x+kt)=\cos.mx.\cos.mkt-\sin.mx.\sin.mkt$$
$$+\sqrt{-1}(\sin.mx\cos.mkt+\cos.mx\sin.mkt),$$

et de même $e^{n(x-kt)}$ par

$$\cos.nx.\cos.nkt+\sin.nx.\sin.nkt+\sqrt{-1}(\sin.nx\cos.nkt-\cos.nx\sin.nkt),$$

et ainsi des autres termes. De plus, il faudra supprimer les termes contenant $\cos.mx$ ou $\cos.nx$, puisqu'ils ne deviennent point nuls quand $x=0$; et quand aux termes contenant $\sin.mx$ ou $\sin.nx$, on devra prendre pour les constantes m ou n un nombre entier de demi-circonférences divisé par a, afin que ces termes s'évanouissent lorsque $x=a$. Nous aurons donc pour l'intégrale cherchée, en donnant des coefficients différents aux termes qui satisfont séparément à l'équation différentielle,

$$y=A_1\sin.\frac{\pi x}{a}\cos.\frac{\pi kt}{a}+A_2\sin.\frac{\pi x}{a}\cos.\frac{2\pi kt}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}\cos.\frac{3\pi kt}{a}+\text{etc.}$$
$$+B_1\sin.\frac{\pi x}{a}\sin.\frac{\pi kt}{a}+B_2\sin.\frac{2\pi x}{a}\sin.\frac{2\pi kt}{a}+B_3\sin.\frac{3\pi x}{a}\sin.\frac{3\pi kt}{a}+\text{etc.}$$

et il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients

A_1, A_2, A_3, etc., et B_1, B_2, B_3, etc., d'après la considération de l'état initial.

496. Supposons donc qu'à l'instant d'où l'on commence à compter le temps : 1° la figure de la corde soit exprimée par l'équation $y = \varphi(x)$; 2° la vitesse de l'un quelconque de ses points soit exprimée par l'équation $\frac{dy}{dt} = \psi(x)$, φ et ψ désignant des fonctions entièrement arbitraires. Pour que l'expression précédente s'accorde avec ces conditions, on devra donc avoir

$$\varphi(x) = A_1 \sin.\frac{\pi x}{a} + A_2 \sin.\frac{2\pi x}{a} + A_3 \sin.\frac{3\pi x}{a} + \text{etc.},$$

$$\psi(x) = B_1 \frac{\pi k}{a} \sin.\frac{\pi x}{a} + B_2 \frac{2\pi k}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} + B_3 \frac{3\pi k}{a} \sin.\frac{3\pi x}{a} + \text{etc.},$$

équations d'après lesquelles les coefficients dont il s'agit, se détermineront conformément à ce qu'on a vu dans le n° 491. L'expression complète de l'ordonnée y sera en conséquence

$$y = \left[\begin{array}{l} \frac{2}{a} \mathbf{S}_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi k}{a} . \cos. \frac{i\pi kt}{a} \int_0^a d\alpha . \sin. \frac{i\pi \alpha}{a} . \varphi(\alpha) \\ + \frac{2}{k\pi} \mathbf{S}_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} \sin. \frac{i\pi x}{a} . \sin. \frac{i\pi kt}{a} \int_0^a d\alpha . \sin. \frac{i\pi \alpha}{a} . \psi(\alpha) \end{array} \right].$$

Cette expression montre que, quel que soit l'état initial, le mouvement de la corde peut être regardé comme la réunion ou la superposition d'une infinité de mouvements simples oscillatoires, exprimés chacun par un terme des séries. Les durées des oscillations dans ces divers mouvements simples décroissent comme les nom-

bres 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc. L'état initial se reproduit alternativement d'un côté et de l'autre de la direction naturelle de la corde. La durée d'une oscillation entière est $a\sqrt{\frac{p}{g\mathrm{P}}}$, en sorte qu'elle est proportionnelle à la longueur de la corde entre ses extrémités fixes, et réciproque à la racine quarrée du rapport du poids de l'unité de longueur de la corde au poids qui en mesure la tension. Ces résultats sont entièrement conformes à l'expérience.

Des notions analogues à celles qui ont été présentées dans le n° 493, prouveront d'ailleurs que la solution est unique, et nécessairement donnée par l'expression précédente, qui s'accorde avec l'état initial et vérifie l'équation différentielle.

NOTE.

Démonstration de la convergence des séries de sinus d'arcs multiples, exprimant la valeur d'une fonction arbitraire entre des limites données.

La convergence de ces séries, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, peut être démontrée de la manière suivante.

Soit, pour plus de simplicité $a=\pi$; le terme général deviendra

$$\sin.ix\int_0^\pi d\alpha.\sin.i\alpha.\varphi(\alpha).$$

Supposons d'abord i pair. L'intégrale $\int_0^\pi dx.\sin.ix.\varphi(x)$ se composera d'un nombre entier de parties correspondantes à des intervalles égaux à $\frac{2\pi}{i}$ pris sur l'axe des x

ntre 0 et π. Considérons les termes de la série assez :loignés du premier, et où le nombre i est assez grand, ›our que, dans chacun de ces intervalles, la ligne dont $\varphi(\alpha)$ est l'ordonnée puisse être regardée comme une ligne lroite, et soit $m+n\alpha$ l'ordonnée de cette ligne droite. Remarquons que

$$\int_0^{\frac{2\pi}{i}} d\alpha \,.\, \sin.\, i\alpha\,(m+n\alpha) = -n\,\frac{2\pi}{i^2};$$

ou en appelant α_1 et α_2 les abscisses qui répondent aux deux limites de cette intégrale, ce qui donne $n = \dfrac{\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1)}{\frac{2\pi}{i}}$,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \,.\, \sin.\, i\alpha\,(m+n\alpha) = \frac{1}{i}\,[\varphi(\alpha_1)-\varphi(\alpha_2)].$$

D'où l'on conclut immédiatement, pour les termes dont il s'agit,

$$\int_0^{\pi} d\alpha \,.\, \sin.\, i\alpha \,.\, \varphi(\alpha) = \frac{1}{i}\,[\varphi(0)-\varphi(\pi)].$$

Supposons ensuite i impair. L'intégrale cherchée se composera d'abord d'un nombre entier de parties correspondantes à des intervalles égaux à $\frac{2\pi}{i}$, dont la somme totale sera, d'après ce qui précède, $\frac{1}{i}\left[\varphi(0)-\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{i}\right)\right]$; puis d'une dernière partie correspondante à un intervalle égal à $\frac{\pi}{i}$. Or, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{i}} d\alpha \,.\, \sin.\, i\alpha\,(m+n\alpha) = \frac{2m}{i} + \frac{n\pi}{i^2},$$

et pour cette dernière partie,

$$m=\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{i}\right),\quad n=\frac{\varphi(\pi)-\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{i}\right)}{\frac{\pi}{i}};$$

d'où résulte

$$\int_{\pi-\frac{\pi}{i}}^{\pi} d\alpha.\sin.i\alpha(m+n\alpha)=\frac{1}{i}\left[\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{i}\right)+\varphi(\pi)\right].$$

Donc lorsque i est impair et extrêmement grand, on a sensiblement

$$\int_{0}^{\pi} d\alpha.\sin.i\alpha.\varphi(\alpha)=\frac{1}{i}\left[\varphi(0)+\varphi(\pi)\right].$$

On conclut de ce qui précède : 1° que si la ligne dont $\varphi(x)$ est l'ordonnée se réduit à une ligne droite, on a exactement

$$\varphi(0)+\frac{\varphi(\pi)-\varphi(0)}{\pi}x=$$

$$\frac{2}{\pi}.\left[\begin{array}{l}[\varphi(0)+\varphi(\pi)]\left(\sin.x+\frac{1}{3}\sin.3x+\frac{1}{5}\sin.5x+\frac{1}{7}\sin.7x+\text{etc.}\right)\\ +[\varphi(0)-\varphi(\pi)]\left(\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{4}\sin.4x+\frac{1}{6}\sin.6x+\frac{1}{8}\sin.8x+\text{etc.}\right)\end{array}\right];$$

2° que, quelle que soit cette ligne, le résultat obtenu tendra toujours à coïncider de plus en plus avec l'expression précédente à mesure que l'on considérera des termes de la série plus éloignés du premier. D'où il résulte qu'il suffira de vérifier cette équation pour que la convergence des séries soit démontrée dans tous les cas possibles.

Considérons en premier lieu la série

$$U=\sin.x+\frac{1}{3}\sin.3x+\frac{1}{5}\sin.5x+\frac{1}{7}\sin.7x+\text{etc.},$$

ne prenons d'abord que la somme d'un nombre déterminé de termes, et écrivons

$$U_n = \sin. x + \frac{1}{3}\sin. 3x + \frac{1}{5}\sin.5x + \frac{1}{7}\sin.7x + \ldots + \frac{1}{n}\sin.nx,$$

n désignant un nombre impair. Différentiant par rapport à x, il viendra

$$\frac{dU_n}{dx} = \cos. x + \cos. 3x + \cos. 5x + \cos.7x + \ldots + \cos.nx;$$

ou, d'après une formule qui sera donnée plus loin,

$$\frac{dU_n}{dx} = \frac{\sin.(n+1)x}{2\sin.x}.$$

On trouvera donc, en multipliant par dx et intégrant,

$$U_n = const. - \frac{\cos.(n+1)x}{2(n+1)\sin.x} + \frac{1}{2(n+1)}\int \cos.(n+1)x.d\left(\frac{1}{\sin.x}\right).$$

Pour déterminer la constante, on supposera en même temps $x = \frac{\pi}{2}$ et n infiniment grand. Le premier membre deviendra $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}, = \frac{\pi}{4}$ d'où l'on conclut

$$\frac{\pi}{4} = const., \quad \text{et par conséquent} \quad U = \frac{\pi}{4}.$$

Considérons ensuite la série

$$V = \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{4}\sin.4x + \frac{1}{6}\sin.6x + \frac{1}{8}\sin.8x + \text{etc.},$$

et écrivons également

$$V_n = \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{4}\sin.4x + \frac{1}{6}\sin.6x + \frac{1}{8}\sin.8x + \ldots + \frac{1}{n}\sin.nx,$$

n désignant un nombre pair. La différentiation donnera

$$\frac{dV_n}{dx}=\cos.2x+\cos.4x+\cos.6x+\cos.8x+\ldots\ldots+\cos.nx,$$

ou, d'après la formule citée

$$\frac{dV_n}{dx}=-\frac{1}{2}+\frac{\sin.(n+1)x}{2\sin.x};$$

et en intégrant

$$V_n=const.-\frac{x}{2}-\frac{\cos.(n+1)x}{2(n+1)\sin.x}+\frac{1}{2(n+1)}\int\cos.(n+1)x.d\left(\frac{1}{\sin.x}\right).$$

On déterminera la constante en faisant $x=\frac{\pi}{4}$ et n infini.

Le premier membre deviendra $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.}\right)=\frac{\pi}{8}$.

Donc

$$\frac{\pi}{8}=const.-\frac{\pi}{8},\quad \text{d'où}\quad const.=\frac{\pi}{4}\quad \text{et}\quad V=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}.$$

Nous parvenons donc aux deux expressions

$$\frac{\pi}{4}=\sin.x+\frac{1}{3}\sin.3x+\frac{1}{5}\sin.5x+\frac{1}{7}\sin.7x+\text{etc.},$$

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{4}\sin.4x+\frac{1}{6}\sin.6x+\frac{1}{8}\sin.8x+\text{etc.},$$

au moyen desquelles l'équation obtenue ci-dessus devient effectivement identique.

XXXIX. MÉTHODE DES VARIATIONS.

497. La méthode des variations a pris naissance dans les questions de maximis et minimis considérés sous le point de vue le plus étendu ; mais son utilité principale

consiste dans les applications à la mécanique. Nous ne pouvons présenter ici que les premiers éléments de cette méthode et ses usages les plus simples.

Il faut distinguer en premier lieu en quoi les questions de maximis ou minimis qui dépendent du calcul des variations diffèrent des questions ordinaires du même genre. Dans les questions ordinaires, une quantité U est donnée en fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes x, y, z, etc., de manière que pour chaque système de valeurs attribuées à ces variables, il en résulte une valeur déterminée pour U. On demande de fixer les valeurs de x, y, z, etc., qui rendront U la plus grande ou la plus petite qu'il soit possible. Cette question, comme on l'a vu dans l'article XIV, se résout en posant les équations

$$\frac{dU}{dx}=0, \qquad \frac{dU}{dy}=0, \qquad \frac{dU}{dz}=0, \qquad \text{etc.},$$

auxquelles doivent satisfaire les valeurs demandées des variables x, y, z, etc. Quant à la distinction des cas où les valeurs qui satisfont à ces équations répondent effectivement à un maximum ou à un minimum, elle est fondée, comme on l'a vu également dans l'article cité, sur la considération des coefficients différentiels du second ordre de la fonction U.

Dans les questions qui dépendent du calcul des variations, on conçoit entre diverses quantités variables une relation existante, mais indéterminée, et l'on demande de déterminer cette relation de manière que la valeur d'une certaine fonction, valeur qui dépend de la relation dont il s'agit, soit la plus grande possible.

Par exemple une courbe étant tracée entre deux points

fixes, la grandeur de l'air comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, et les ordonnées des points extrêmes, est déterminée, et sa valeur résulte de la relation $y=f(x)$ qui est l'équation de la courbe. Représentons-nous entre les deux points fixes plusieurs courbes qui auraient toutes des longueurs égales : l'équation $x=f(.x)$ sera différente pour chacune, et l'aire, représentée par $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.y$, aura également des valeurs différentes. La longueur de la courbe est exprimée d'ailleurs par

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

On peut demander, cette longueur demeurant la même, de déterminer la figure de la courbe, c'est-à-dire la forme de la fonction $f(x)$, de manière que l'aire $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.y$ soit la plus grande ou la moindre possible.

Concevons encore une courbe tracée entre deux points fixes, et considérons un corps qui descend le long de cette courbe en cédant librement à l'action de la gravité. Le temps que ce corps emploiera à parvenir d'un point à l'autre dépend de la figure de la courbe dont il s'agit, et sa valeur est exprimée, en supposant l'axe des x vertical, par

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{2g(x-x_0)}}.$$

On peut demander de déterminer la relation $y=f(x)$ qui donne la figure de la courbe de manière que ce temps soit le moindre possible. Cette question sera plus éten-

due si l'on admet que la *courbe de la plus vite descente*, ou *brachystochrône*, doit être tracée, non pas entre deux points fixes, mais entre deux lignes courbes données, ou entre deux surfaces courbes données. Les limites x_0 et x^{ω} de l'intégrale deviennent alors variables, aussi bien que l'abscisse x_ω du premier point de la courbe qui se trouve sous le signe d'intégration définie.

Une recherche de même genre est celle de la ligne la plus courte qui puisse être tracée sur une surface donnée, entre deux points fixes, ou entre deux lignes marquées sur cette surface.

498. Ces exemples suffisent pour indiquer quelle est la nature des questions dont il s'agit, et à quelle recherches analytiques on se trouve conduit pour en trouver la solution. L'expression de la quantité qu'il faut rendre un maximum ou un minimum se forme, d'après les règles connues, au moyen des éléments différentiels de la courbe cherchée. Cette expression est toujours une intégrale définie prise entre des limites données, fixes ou variables avec certaines conditions. On doit rendre la valeur de cette intégrale la plus grande ou la moindre possible, en déterminant en conséquence la relation analytique dont dépendent les coefficients différentiels qui se trouvent sous le signe d'intégration. Cette question se résout d'ailleurs au moyen des principes qui s'appliquent aux questions ordinaires de maxima et minima. On suppose que toutes les quantités variables dont dépend la valeur de la fonction proposée augmentent de quantités arbitraires qui peuvent être supposées aussi petites qu'on le veut ; et dans le développement de la

valeur qui en résulte pour cette fonction, on égale à zéro le terme qui contient les premières puissances de ces accroissements ; ou, si l'on veut, on égale à zéro la différentielle totale de la fonction proposée prise par rapport à toutes les quantités variables qu'elle contient. L'équation qui en résulte doit subsister pour toutes les valeurs qui peuvent être attribuées aux accroissements infiniment petits de ces quantités variables. Elle exprime la condition nécessaire du maximum ou minimum. Quant à la distinction des cas où il y a maximum ou minimum, et de ceux où, bien que cette condition soit satisfaite, le maximum ou minimum n'existe pas, elle dépend de la considération du terme qui contient les secondes puissances des accroissements. Le maximum et le minimum ont lieu respectivement lorsque ce terme est toujours négatif ou positif, quelles que soient les valeurs des accroissements.

499. Nous considérerons en premier lieu, le cas où l'on n'a qu'une variable indépendante x, et une fonction y dont la valeur dépend de celle de x, y représentera donc l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse. Il s'agit de déterminer la figure de la courbe de manière que l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx . \mathrm{V}$$

soit un maximum ou un minimum. Les limites x_0 et x_ω de l'intégrale peuvent avoir une valeur constante donnée. Ces limites peuvent aussi, dans quelques cas, varier d'après certaines conditions. V est une fonction quelconque d'un nombre déterminé des quantités

$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc. x étant la variable indépendante, l'élément dx est supposé constant.

Cela posé, nous admettrons d'abord que les limites x_0, x_ω ont une valeur constante. Dans ce cas, les points extrêmes de la portion de courbe que l'on considère doivent se trouver toujours sur les perpendiculaires à l'axe des abscisses, menées aux distances x_0, x_ω de l'origine; et l'on fera varier d'une manière aussi générale qu'il soit possible la fonction proposée $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\,V$, si l'on suppose que la courbe cherchée se change dans une courbe quelconque infiniment voisine qui soit assujettie à cette condition. Or, il n'est pas nécessaire, pour opérer un tel changement, de faire varier x dans la fonction V; il suffit d'attribuer dans cette fonction aux quantités $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., des variations quelconques indépendantes les unes des autres, que nous désignerons par $\delta y, \delta\frac{dy}{dx}, \delta\frac{d^2y}{dx^2}, \delta\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. La caractéristique δ représente, aussi bien que la caractéristique d, un accroissement infiniment petit attribué à la quantité variable affectée de cette caractéristique; mais il y a ici cette différence que le signe d indique un accroissement résultant du passage d'un point de la courbe cherchée au point suivant de la même courbe, tandis que le signe δ indique un accroissement résultant de ce qu'on passe d'un point de la courbe cherchée au point correspondant de la courbe quelconque infiniment voisine. De plus nous appellerons *variations* les accroissements désignés par δ, le nom de *différentielles* étant conservé

aux accroissements indiqués par d. La variation de la fonction V résultant des variations attribuées aux quantités $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., qui y sont contenues, sera exprimée par δV; et l'on aura

$$\delta V = N\delta y + P\delta \frac{dy}{dx} + Q\delta \frac{d^2y}{dx^2} + R\delta \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

si l'on représente par N,P,Q,R, etc., les coefficients différentiels de la fonction V pris respectivement par rapport aux quantités variables $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc.

La condition du maximum ou minimum exige que la variation

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\,\delta V$$

de l'intégrale définie proposée soit nulle. Cette condition est donc exprimée par l'équation

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(N\delta y + P\delta \frac{dy}{dx} + Q\delta \frac{d^2y}{dx^2} + R\delta \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

500. On remarquera maintenant que dans les termes $\frac{\delta dy}{dx}, \frac{\delta d^2y}{dx^2}, \frac{\delta d^3y}{dx^3}$, etc., l'ordre des signes d et δ peut être interverti à volonté. En effet, l'ordonnée du point de la courbe cherchée étant y, l'ordonnée du point suivant de la même courbe est $y+dy$, et celle du point correspondant de la courbe voisine, est $y+\delta y$. Donc l'ordonnée du point suivant de cette dernière courbe est également $y+dy+\delta(y+dy)$, ou $y+\delta y+d(y+\delta y)$. Donc $\delta dy = d\delta y$. La même remarque peut être appliquée à la fonction

$\frac{d^2y}{dx^2}$ et aux fonctions suivantes. On a également $\frac{\delta d^2y}{dx^2} = \frac{d\delta dy}{dx^2} = \frac{d^2\delta y}{dx^2}$, et ainsi de suite. Nous pouvons donc écrire au lieu de l'équation précédente,

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

Or, si l'on considère à part chacun des termes du second membre, on voit qu'au moyen de l'intégration par parties ils peuvent être transformés de la manière suivante. On aura

$$\int dx \,.\, P\frac{d\delta y}{dx} = const. + P\delta y - \int dx. \frac{dP}{dx}\delta y;$$

puis en donnant successivement aux quantités qui entrent dans cette équation les valeurs qui répondent aux limites x_0 et x_ω de l'intégrale,

$$0 = const. + P_0\delta y_0,$$

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx . P\frac{d\delta y}{dx} = const. + P_\omega\delta y_\omega - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \frac{dP}{dx}\delta y;$$

et en retranchant le premier résultat du second,

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, P\frac{d\delta y}{dx} = \begin{bmatrix} -P_0\delta y_0 - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \frac{dP}{dx}\delta y \\ + P_\omega\delta y_\omega \end{bmatrix}.$$

On trouvera de même pour le terme suivant,

$$\int dx \,.\, Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} = const. + Q\delta\frac{dy}{dx} - \int dx \,.\, \frac{dQ}{dx}\frac{\delta dy}{dx}$$
$$= const. + Q\delta\frac{dy}{dx} - \frac{dQ}{dx}\delta y + \int dx \,.\, \frac{d^2Q}{dx^2}\delta y;$$

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} = \left[\begin{array}{l} -Q_0\delta\frac{dy_0}{dx}+\frac{dQ_0}{dx}\delta y_0+\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\frac{d^2Q}{dx^2}\delta y \\ +Q_\omega\delta\frac{dy_\omega}{dx}-\frac{dQ_\omega}{dx}\delta y_\omega \end{array}\right].$$

Le terme qui viendra à la suite donnera

$$\int dx.R\frac{d^3\delta y}{dx^3} = const.+R\delta\frac{d^2y}{dx^2}-\int dx.\frac{dR}{dx}\frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

$$= const.+R\delta\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dR}{dx}\delta\frac{dy}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}\delta y-\int dx.\frac{d^3R}{dx^3}\delta y;$$

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.R\frac{d^3\delta y}{dx^3} =$$

$$\left[\begin{array}{l} -R_0\delta\frac{d^2y_0}{dx^2}+\frac{dR_0}{dx}\delta\frac{dy_0}{dx}-\frac{d^2R_0}{dx^2}\delta y_0-\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\frac{d^3R}{dx^3}\delta y \\ +R_\omega\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2}-\frac{dR_\omega}{dx}\delta\frac{dy_\omega}{dx}+\frac{d^2R_\omega}{dx^2}\delta y_\omega \end{array}\right];$$

Et ainsi de suite, pour les autres termes.

D'après ces transformations, l'équation précédente exprimant la condition du maximum ou du minimum se trouve changée en

$$\left[\begin{array}{l} -\left(P_0-\frac{dQ_0}{dx}-\text{etc.}\right)\delta y_0-\left(Q_0-\frac{dR_0}{dx}+\text{etc.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx} \\ \qquad -(R_0-\text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_0}{dx^2}-\text{etc.} \\ +\left(P_\omega-\frac{dQ_\omega}{dx}-\text{etc.}\right)\delta y_\omega+\left(Q_\omega-\frac{dR_\omega}{dx}+\text{etc.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx} \\ \qquad +(R_\omega-\text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2}+\text{etc.} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{etc.}\right)\delta y \end{array}\right]$$

$$=0.$$

Cette équation doit subsister, pour que la condition du maximum ou du minimum de l'intégrale définie proposée soit satisfaite, quelles que soient les variations marquées par le signe δ. Les deux premières lignes contiennent les variations des quantités y_0, $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{d^2y_0}{dx^2}$, etc., ou y_ω, $\frac{dy_\omega}{dx}$, $\frac{d^2y_\omega}{dx^2}$, etc., qui représentent les valeurs que prennent les fonctions y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., lorsqu'on attribue à l'abscisse x les valeurs y_0 ou x_ω qui répondent aux limites de l'intégrale définie proposée. La dernière ligne contient sous le signe d'intégration la variation δy de l'une quelconque des coordonnées de la courbe, variation qui est entièrement arbitraire. Cette dernière ligne doit être égalée séparément à zéro; et il en est de même des deux autres.

501. Nous aurons donc en premier lieu *l'équation indéfinie*

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.},$$

qui appartient à tous les points de la courbe, et qui doit d'abord être vérifiée par l'expression de y en x qui résoudra la question. Cette équation sera une équation différentielle entre les variables x et y, dont il s'agira de trouver l'intégrale générale.

Nous aurons ensuite, si les variations relatives à la première limite de l'intégrale sont indépendantes des variations relatives à la seconde limite, les *équations déterminées*

$$0 = -\left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \text{etc.}\right)\delta y_0 - \left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{etc.}\right)\delta \frac{dy_0}{dx}$$
$$- (R_0 - \text{etc.})\,\delta \frac{d^2y_0}{dx^2} - \text{etc.},$$

$$0 = \left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta y_\omega + \left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta \frac{dy_\omega}{dx}$$
$$+ (R_\omega - \text{etc.})\,\delta \frac{d^2y_\omega}{dx^2} + \text{etc.};$$

qui appartiennent aux deux limites de l'intégrale, et qui doivent également être satisfaites par l'expression de y en x qui résout la question, lorsqu'on donne à x les valeurs extrêmes x_0, x_ω.

Si les points extrêmes étaient donnés de position, ou si les valeurs des ordonnées y_0 et y_ω étaient constantes aussi bien que x_0 et x_ω, on aurait alors $\delta y_0 = 0, \delta y_\omega = 0$, et les premiers termes des équations dont il s'agit disparaîtraient. Il suffirait donc, pour y satisfaire, d'égaler séparément à zéro les termes suivants. De même si les valeurs de quelques-uns des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., appartenant à l'un ou à l'autre des points extrêmes, étaient donnés par la nature de la question, on aurait $\delta \frac{dy_0}{dx} = 0, \delta \frac{d^2y_0}{dx^2} = 0$, etc., pour l'un de ces points; ou $\delta \frac{dy_\omega}{dx} = 0, \delta \frac{d^2y_\omega}{dx^2} = 0$, etc., pour l'autre; et les termes affectés de ces variations disparaîtraient d'eux-mêmes. Quant aux termes qui ne disparaissent point ainsi d'eux-mêmes par suite des valeurs déterminées que doivent conserver l'ordonnée y ou quelques-uns de ses coefficients différentiels dans les points extrêmes de la courbe, on doit les égaler séparément à

zéro. Les équations qu'on obtient de cette manière servent en général à déterminer les constantes arbitraires introduites par l'intégration de l'équation indéfinie du n° précédent.

502. Avant d'aller plus loin, on remarquera qu'en égalant à zéro le terme qui reste affecté du signe d'intégration dans l'expression de $\int dx.\delta V$, on exprime la condition nécessaire pour que l'intégration indiquée puisse s'effectuer; ou pour que la fonction $dx.\delta V$ soit une différentielle exacte, ce qui résulterait de ce que la fonction Vdx serait elle-même une différentielle exacte. Car la supposition $Vdx = dU$ entraîne $\delta V\,dx = \delta dU = d\delta U$. D'ailleurs, mettant y', y'', y''', etc., à la place de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., l'équation de condition

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

dont il s'agit, peut s'écrire

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dy''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dy'''}\right) + \text{etc.}$$

Si elle est satisfaite, la fonction Vdx, dans laquelle V contient x, y, y', y'', etc., sera une différentielle exacte d'une fonction de l'ordre immédiatement inférieur.

Nous pouvons vérifier cette proposition pour les fonctions du premier ordre. L'équation de condition se réduit alors à

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right).$$

Comme elle doit être identique, les deux termes doivent

être du même ordre. Donc, puisque $\frac{dV}{dy}$ ne peut contenir que y', il s'ensuit que $\frac{dV}{dy'}$ ne doit pas contenir y', puisqu'autrement $\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)$ contiendrait y''; d'où l'on conclut en premier lieu que la fonction différentielle du premier ordre dont il s'agit, qui doit être une différentielle exacte, ne peut être que de la forme

$$(A+By')dx, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad Adx+Bdy,$$

A et B étant des fonctions de x et de y seulement. Cette fonction donnera

$$\frac{dV}{dy}=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dV}{dy'}=B;$$

et en substituant dans l'équation de condition, il viendra,

$$0=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dB}{dx}+\frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx},$$

conformément à ce qu'on a vu dans le n° 365.

503. Nous avons supposé dans le n° 499, afin de considérer d'abord le cas plus simple, que dans l'intégrale définie proposée

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.V,$$

qu'il s'agit de rendre un maximum ou un minimum, les limites x_0, x_ω étaient constantes, en sorte que dans tous les changements que l'on pouvait faire subir à la

courbe qui représente la relation de y à x, les points extrêmes devaient demeurer constamment sur les mêmes parallèles à l'axe des y. Nous supposerons maintenant ces limites variables. Dans ce cas, nous ferons varier la fonction $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.V$ de la manière la plus générale qu'il soit possible, en admettant que toutes les abscisses x augmentent de la quantité arbitraire δx, en même temps que l'ordonnée y et ses dérivées augmenteront comme ci-dessus, des quantités δy, $\delta \frac{dy}{dx}$, $\delta \frac{d^2y}{dx^2}$, etc. La courbe qui exprime la relation de y à x se changera alors en une courbe infiniment voisine. La variation qui en résultera dans l'intégrale $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.V$ sera exprimée par

$$-V_0\delta x_0 + V_\omega \delta x_\omega + \int_{x_0}^{x_\omega} dx.\delta V.$$

Mais il faut remarquer ici que, par l'effet de la variation supposée de l'abscisse x, un point quelconque de la première courbe étant transporté dans la courbe variée, son ordonnée devient $y+\delta y$. Donc, l'ordonnée qui répond à l'abscisse x dans la courbe variée, a pour expression $y+\delta y-\left(\frac{dy}{dx}+\delta\frac{dy}{dx}\right)\delta x$, ou $y+\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x$, en négligeant les quantités du second ordre. On conclut de là qu'en formant δV dans l'expression précédente, nous devons regarder y comme augmentant, non pas de δy, mais de $\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x$. La même

remarque s'appliquera aux fonctions dérivées de y. On doit regarder $\frac{dy}{dx}$ comme ayant varié seulement de $\delta\frac{dy}{dx} - \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta x$, ou $\delta\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\delta x$. On considérera également $\frac{d^2y}{dx^2}$ comme ayant varié seulement de $\delta\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3}\delta x$, et ainsi des autres. Par conséquent, si nous représentons comme dans le n° 499, par N, P, Q, etc., les coefficients différentiels partiels de la fonction V pris respectivement par rapport à y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. nous devrons écrire ici,

$$\delta V = N\left(dy - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + P\left(\delta\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\delta x\right) + Q\left(\delta\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3}\delta x\right)$$

On remarquera de plus qu'en posant

$$dy - \frac{dy}{dx}\delta x = \delta u,$$

et différentiant cette équation, il vient

$$\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\delta x - \frac{dy}{dx}\frac{d\delta x}{dx} = \frac{d\delta u}{dx};$$

puis en ajoutant l'équation identique

$$\delta\frac{dy}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{\delta dx}{dx},$$

on trouve (puisque l'ordre des signes d et δ peut être changé à volonté),

$$\delta\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\delta x = \frac{d\delta u}{dx}.$$

Différentiant de même cette dernière équation, ce qui donne

$$\frac{d\delta\frac{dy}{dx}}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3}\delta x - \frac{d^2y}{dx^2}\frac{d\delta x}{dx} = \frac{d^2\delta u}{dx^2};$$

puis ajoutant l'équation identique

$$\delta\frac{d^2y}{dx^2} = \delta\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\delta d\frac{dy}{dx}}{dx} - \frac{d^2y}{dx}\frac{\delta dx}{dx},$$

on trouve également

$$\delta\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3}\delta x = \frac{d^2\delta u}{dx^2}.$$

On obtiendra de la même manière

$$\delta\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^4y}{dx^4}\delta x = \frac{d^3\delta u}{dx^3};$$

et ainsi de suite. Il en résulte que l'expression précédente de δV peut s'écrire

$$\delta V = N\delta u + P\frac{d\delta u}{dx} + Q\frac{d^2\delta u}{dx^2} + R\frac{d^3\delta u}{dx^3} + \text{etc.}$$

L'équation exprimant la condition du maximum ou du minimum sera donc

$$0 = \left[\begin{array}{l} -V_0\delta x_0 + V_\omega\delta x_\omega \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(N\delta u + P\frac{d\delta u}{dx} + Q\frac{d^2\delta u}{dx^2} + R\frac{d^3\delta u}{dx^3} + \text{etc.}\right)\end{array}\right];$$

et en opérant sur le second terme les transformations indiquées n° 500, cette équation se changera en

$$\left[\begin{array}{l} -V_0\delta x_0-\left(P_0-\frac{dQ_0}{dx}+\frac{d^2R_0}{dx^2}-\text{etc.}\right)\left(\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right) \\ -\left(Q_0-\frac{dR_0}{dx}+\text{etc.}\right)\left(\delta\frac{dy_0}{dx}-\frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0\right)-\text{etc.} \\ +V_\alpha dx_\alpha+\left(P_\alpha-\frac{dQ_\alpha}{dx}+\frac{d^2P_\alpha}{dx^2}-\text{etc.}\right)\left(\delta y_\alpha-\frac{dy_\alpha}{dx}\delta x_\alpha\right) \\ +\left(Q_\alpha-\frac{dR_\alpha}{dx}+\text{etc.}\right)\left(\delta\frac{dy_\alpha}{dx}-\frac{d^2y_\alpha}{dx^2}\delta x_\alpha\right)+\text{etc} \\ +\int_{x_0}^{x_\alpha}dx\left[N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{etc.}\right]\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right) \end{array}\right]$$
$$=0.$$

En comparant ce résultat à celui du n° 500, on voit en premier lieu que l'on est conduit ici à la même équation indéfinie

$$0=N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{etc.},$$

qui doit subsister pour tous les points de la courbe. Quant aux équations déterminées, elles diffèrent de celles qui sont écrites n° 501, par l'introduction des termes $-V_0\delta x_0$ et $V_\alpha\delta x_\alpha$; et parce que les quantités δy_0 et δy_ω sont remplacées par $\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0$ et $\delta y_\omega-\frac{dy}{dx}\delta x_\alpha$; les quantités $\delta\frac{dy_0}{dx}$ et $\delta\frac{dy_\omega}{dx}$ par $\delta\frac{dy_0}{dx}-\frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0$ et $\delta\frac{dy_\omega}{dx}-\frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\alpha$; et ainsi de suite. Si les variations δx_0, δy_0, $\delta\frac{dy_0}{dx}$, etc., et δx_α, δy_ω, $\delta\frac{dy_\omega}{dx}$; etc., sont arbitraires, le coefficient de chacune de ces variations doit être égalé séparément à zéro, ce qui donnera autant d'équations distinctes auxquelles l'expression cherchée de y en x doit satisfaire quand on donne à x les va-

leurs extrêmes x_0 et x_n. Si quelques unes des quantités $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., ont des valeurs déterminées pour l'un ou l'autre des points extrêmes de la courbe, les termes affectés des variations de ces quantités disparaissent d'eux-mêmes, et on doit égaler seulement à zéro les termes affectés des autres variations. Il faut remarquer d'ailleurs que si la position des points extrêmes est entièrement arbitraire, chacun de ces points peut être placé où l'on veut sur le plan de la courbe, sans qu'elle cesse pour cela de satisfaire à la condition de maximum ou minimum de l'intégrale définie proposée. Donc on est alors le maître de supposer $\delta x_0=0$ et $\delta y_0=0$ et, par conséquent, de ne point poser les équations exprimant l'égalité à zéro des coefficients dont ces deux variations sont affectées dans l'équation précédente ; en sorte que dans le cas dont il s'agit, l'on a deux équations de moins pour la détermination des constantes.

504. Nous devons remarquer que la fonction désignée par V dans l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_n} dx.\mathrm{V}$$

qu'il s'agit de rendre un maximum ou un minimum, pourrait contenir une ou plusieurs des quantités $x_0, y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}$, etc., ou $x_n, y_n, \frac{dy_n}{dx}, \frac{d^2y_n}{dx^2}$, etc., qui appartiennent aux points extrêmes de la courbe. On en voit un exemple dans la question de la brachystochrône citée n° 497, où la fonction sous le signe d'intégration

contient l'abscisse du premier de ces points. On doit dans ce cas, en formant la variation δV, faire varier les quantités dont il s'agit, si leurs valeurs ne sont point constantes en vertu de l'énoncé de la question.

Si, par exemple, V contenait x_0, et que la variation de V prise par rapport à cette quantité fût $\mu\delta x_0$, l'expression de δV du n° 503, devrait être augmentée du terme $\mu\delta x_0$. Donc le terme affecté du signe d'intégration dans l'équation qui exprime la condition du maximum ou minimum devrait être augmenté de la quantité $\int_{x_0}^{x_\alpha} dx.\mu\delta x_0$, ou $\delta x_0 \int_{x_0}^{x_\alpha} dx.\mu$. Il s'ensuit que l'on devrait ajouter cette quantité au second membre de celle des équations déterminées qui se rapporte à la première limite, en sorte que le terme affecté de δx_0 dans cette équation deviendrait

$$\left(-V_0 + \int_{x_0}^{x_\alpha} dx.\mu\right)\delta x_0.$$

On aurait égard de la même manière à la variation des autres fonctions dont il s'agit, si elles entraient dans la composition de la fonction V.

505. Nous avons considéré jusqu'ici le cas où l'on avait une seule variable indépendante x, et une fonction y dépendante de cette variable, comme cela a lieu dans les problèmes qui se rapportent à une courbe plane. Dans les questions relatives à une courbe à double courbure, il faut considérer une variable indépendante x, et deux fonctions y et z qui dépendent de cette variable. L'intégrale définie qu'il s'agit de rendre un maximum étant toujours

$$\int_{x_0}^{x_{\omega}} dx.\mathrm{V},$$

la fonction V contient alors en général, outre la variable x, les fonctions $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc. et $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}$, etc. Supposons d'abord, comme dans le n° 472, les limites x_0 et x_{ω} de l'intégrale constantes. La variation de cette intégrale est

$$\int_{x_0}^{x_{\omega}} dx.\delta\mathrm{V}.$$

Admettons qu'en différentiant la fonction V par rapport aux quantités y, z et à leurs fonctions dérivées, et marquant les différentielles par δ, l'on trouve

$$\delta\mathrm{V}=\left[\begin{array}{l}\mathrm{N}\delta y+\mathrm{P}\delta\frac{dy}{dx}+\mathrm{Q}\delta\frac{d^2y}{dx^2}+\mathrm{R}\delta\frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}\\ +n\delta z+p\delta\frac{dz}{dx}+q\delta\frac{d^2z}{dx^2}+r\delta\frac{d^3z}{dx^3}+\text{etc.}\end{array}\right];$$

l'équation exprimant la condition du maximum ou minimum de l'intégrale définie proposée sera

$$0=\int_{x_0}^{x_{\omega}} dx\left[\begin{array}{l}\mathrm{N}\delta y+\mathrm{P}\delta\frac{dy}{dx}+\mathrm{Q}\delta\frac{d^2y}{dx^2}+\mathrm{R}\delta\frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}\\ +n\delta z+p\delta\frac{dz}{dx}+q\delta\frac{d^2z}{dx^2}+r\delta\frac{d^3z}{dx^3}+\text{etc.}\end{array}\right].$$

Appliquant donc à cette équation l'analyse exposée n° 500, on verra, comme dans les n° 501 et 502 : 1° que l'on doit avoir pour tous les points de la courbe l'équation indéfinie

$$0=\left[\begin{array}{l}\left(\mathrm{N}-\frac{d\mathrm{P}}{dx}+\frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2}-\frac{d^3\mathrm{R}}{dx^3}+\text{etc.}\right)\delta y\\ +\left(n-\frac{dp}{dx}+\frac{d^2q}{dx^2}-\frac{d^3r}{dx^3}+\text{etc.}\right)\delta z\end{array}\right]$$

laquelle, si les variations δy et δz sont entièrement indépendantes l'une de l'autre, donne les deux équations distinctes

$$0=N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{etc.}$$

$$0=n-\frac{dp}{dx}+\frac{d^2q}{dx^2}-\frac{d^3r}{dx^3}+\text{etc.}$$

2° que l'on a également pour les points extrêmes de la courbe les équations déterminées suivantes, savoir : pour le premier point

$$\left[\begin{array}{l}\left(P_0-\frac{dQ_0}{dx}+\frac{d^2R_0}{dx^2}-\text{etc.}\right)\delta y_0+\left(Q_0-\frac{dR_0}{dx}+\text{etc.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx}\\ \quad+(R-\text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_0}{dx^2}+\text{etc.}\\ \left(p_0-\frac{dq_0}{dx}+\frac{d^2r_0}{dx^2}-\text{etc.}\right)\delta z_0+\left(q_0-\frac{dr_0}{dx}+\text{etc.}\right)\delta\frac{dz_0}{dx}\\ \quad+(r_0-\text{etc.})\,\delta\frac{d^2z_0}{dx^2}+\text{etc.}\end{array}\right]$$
$$=0;$$

et pour le second point

$$\left[\begin{array}{l}\left(P_\omega-\frac{dQ_\omega}{dx}+\text{etc.}\right)\delta y_\omega+\left(Q_\omega-\frac{dR_\omega}{dx}+\text{etc.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx}\\ \quad+(R-\text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2}+\text{etc.}\\ +\left(p_\omega-\frac{dq_\omega}{dx}+\text{etc.}\right)\delta z_\omega+\left(q_\omega-\frac{dr_\omega}{dx}+\text{etc.}\right)\delta\frac{dz_\omega}{dx}\\ \quad+(r_\omega-\text{etc.})\,\delta\frac{d^2z_\omega}{dx^2}+\text{etc.}\end{array}\right]$$
$$=0.$$

On doit appliquer à ces deux équations les remarques faites n° 502, relativement aux conditions qui peuvent être données pour les extrémités de la courbe.

On doit également appliquer au cas dont il s'agit, les remarques faites n° 504, relativement à la nécessité de tenir compte dans l'expression de δV des variations des quantités relatives aux limites, lorsque ces quantités sont variables et entrent dans la composition de la fonction V.

Il est aisé d'étendre cette analyse aux cas où il y aurait un plus grand nombre de fonctions dépendantes de la variable x.

506. Nous pouvons remarquer ici, comme dans le n° 502, que les équations

$$0=N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{etc.}$$

$$0=n-\frac{dp}{dx}+\frac{d^2q}{dx}-\frac{d^3r}{dx^3}+\text{etc.},$$

que l'on peut écrire

$$0=\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dy'''}\right)+\text{etc.}$$

$$0=\frac{dV}{dz}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dz'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dz''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dz'''}\right)+\text{etc.},$$

en mettant y', y'', y''', etc., à la place de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., et z', z'', z''', etc., à la place de $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}$, etc., expriment les conditions nécessaires pour que la fonction Vdx soit une différentielle exacte.

Dans le cas où cette fonction serait du premier ordre, ces équations se réduisent à

$$0=\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right), \qquad 0=\frac{dz}{dV}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dz'}\right).$$

On en conclurait d'abord, comme dans le n° cité, que

la fonction dont il s'agit doit, pour être une différentielle exacte, être de la forme

$$(A+By'+Cz')\,dx, \quad \text{c'est-à-dire} \quad A\,dx+B\,dy+C\,dz,$$

A,B,C désignant des fonctions qui ne contiennent que x,y et z. Cette fonction donnerait donc

$$\frac{dV}{dy}=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dC}{dy}z', \qquad \frac{dV}{dz}=\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}y'+\frac{dC}{dz}z'$$

$$\frac{dV}{dy'}=B, \qquad \frac{dV}{dz'}=C;$$

et en substituant dans les équations de condition, on trouverait

$$0=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dC}{dy}z'-\left(\frac{dB}{dx}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dB}{dz}z'\right),$$

$$0=\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}y'+\frac{dC}{dz}z'-\left(\frac{dC}{dx}+\frac{dC}{dy}y'+\frac{dC}{dz}z'\right);$$

ou

$$0=\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}-\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)z',$$

$$0=\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}+\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)y'.$$

Comme ces équations ne doivent pas déterminer y' et z' puisque y et z sont des fonctions quelconques de x, on en conclut les trois équations distinctes

$$\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}=0, \quad \frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}=0, \quad \frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}=0,$$

conformément à ce qu'on a vu dans le n° 366.

507. Si l'on admet maintenant, comme dans le n° 503, que les limites x_0 et x_n de l'intégrale définie proposée

puissent varier, il sera nécessaire de faire varier l'abscisse x. On reconnaîtra que les variations des coordonnées correspondantes à cette abscisse ne sont plus alors δy et δz, mais $\delta y - \frac{dy}{dx}\,\delta x$ et $\delta z - \frac{dz}{dx}\,\delta x$. Par conséquent, l'équation indéfinie qui doit subsister pour tous les points de la courbe devient

$$\left[\begin{array}{l}\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}\right)\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\,\delta x\right) \\ + \left(n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{etc.}\right)\left(\delta z - \frac{dz}{dx}\,\delta x\right)\end{array}\right]; = 0.$$

et si les variations $\delta x, \delta y, \delta z$, sont entièrement indépendantes les unes des autres, on aura comme ci-dessus les équations distinctes

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

$$0 = n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{etc.}$$

A l'égard des équations déterminées, on verra également que l'on est obligé d'ajouter au second membre de l'équation relative à la première limite, le terme $-V_0\delta x_0$; et de remplacer δy_0 et δz_0 par $\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0$ et $\delta z_0 - \frac{dz_0}{dx}\delta x_0$, $\delta\frac{dy_0}{dx}$ et $\delta\frac{dz_0}{dx}$ par $\delta\frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0$ et $\delta\frac{dz_0}{dx} - \frac{d^2z_0}{dx^2}\delta x_0$, et ainsi de suite. On ajoutera de même à l'équation déterminée relative à la seconde limite, le terme $V_\omega\delta_\omega$; et l'on remplacera δy_ω et δz_ω par $\delta y - \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega$ et $\delta z - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega$, $\delta\frac{dy_\omega}{dx}$ et $\delta\frac{dz_\omega}{dx}$ par $\delta\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega$ et $\delta\frac{dz_\omega}{dx} - \frac{d^2z_\omega}{dx^2}\delta x_\omega$, et ainsi de suite.

508. Dans les équations qui se rapportent aux surfaces, par exemple dans la recherche de la surface qui, se terminant à un contour donné, aurait la plus petite aire possible, on doit considérer deux variables indépendantes x, y, et une fonction z dépendante de ces variables. Il s'agit alors d'exprimer les conditions du maximum ou minimum d'une intégrale double telle que

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \,.\, V,$$

dans laquelle V peut contenir en général les variables indépendantes x, y, ainsi que la fonction z et de ses dérivées $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$, etc. Nous considérerons seulement le cas où la projection sur le plan des x, y du contour auquel se termine la surface est un rectangle dont les côtés sont respectivement parallèles aux axes des x et y. Les limites x_0, x_ω désignent les abscisses extrêmes; les limites y_0 et y_ω désignent de même les ordonnées extrêmes. De plus, nous supposerons que ces limites ont des valeurs données et invariables, en sorte que le contour de la portion de surface dont il s'agit, ait toujours pour projection les côtés du rectangle. Il ne sera pas nécessaire alors de faire varier les abscisses x et y. La variation de l'intégrale définie proposée sera

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \,.\, \delta V,$$

et si l'on suppose

$$\delta V = L\delta z + M\delta\frac{dz}{dx} + N\delta\frac{dz}{dy} + P\delta\frac{d^2z}{dx^2} + Q\delta\frac{d^2z}{dxdy} + R\delta\frac{d^2z}{dx^2} + \text{etc.}$$

on aura, pour exprimer la condition du maximum ou du minimum de cette intégrale, l'équation

$$0=\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy\Big[L\delta z+M\delta\frac{dz}{dx}+N\delta\frac{dz}{dy}$$
$$+P\delta\frac{d^2z}{dx^2}+Q\delta\frac{d^2z}{dxdy}+R\delta\frac{d^2z}{dx^2}+\text{etc.}\Big].$$

509. Appliquant donc les règles du calcul des variations comme on l'a fait n° 500, c'est-à-dire faisant passer dans les termes compris sous le double signe d'intégration le d devant le δ, et intégrant par parties, on transformera ces termes de la manière suivante.

1° $\displaystyle\iint dxdy M\frac{d\delta z}{dx}=\int dy.M\delta z-\iint dxdy\frac{dM}{dx}\delta z+const.$;

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy.M\frac{d\delta z}{dx}=-\int_{y_0}^{y_\omega} dy(M\delta z)_{(x_0)}+\int_{y_0}^{y_\omega} dy(M\delta z)_{(x_\omega)}$$
$$-\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy\frac{dM}{dx}\delta z.$$

Les signes (x_0), (x_ω) mis au bas des parenthèses, indiquent que dans les quantités contenues dans ces parenthèses, on donne à x les valeurs $x=x_0, x=x_\omega$, c'est-à-dire que ces quantités ont les valeurs qui conviennent aux limites de la surface par rapport au plan des y, z.

La même transformation donne

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy.N\frac{d\delta z}{dy}=-\int_{x_0}^{x_\omega} dx(N\delta z)_{(y_0)}+\int_{x_0}^{x_\omega} dx(N\delta z)_{(y_\omega)}$$
$$-\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy\frac{dN}{dy}\delta z.$$

Les signes (y_0), (y_ω) indiquent que les quantités contenues dans les parenthèses ont les valeurs qui conviennent aux limites de la surface parallèles au plan des x, z.

2°
$$\iint dx dy P \frac{d^2\delta z}{dx^2} = \int dy P\delta \frac{dz}{dx} - \int dy \frac{dP}{dx}\delta z + \iint dx dy \frac{d^2P}{dx^2}\delta z + const.,$$

d'où

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy P \frac{d^2\delta z}{dx^2} =$$

$$\left[\begin{aligned} &-\int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(P\delta\frac{dz}{dx}\right)_{(x_0)} + \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dP}{dx}\delta z\right)_{(x_0)} \\ &+\int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(P\delta\frac{dz}{dx}\right)_{(x_\omega)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dP}{dx}\delta z\right)_{(x_\omega)} \\ &+\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2P}{dx^2}\delta z \end{aligned}\right]$$

$$3° \iint dx dy Q \frac{d^2\delta z}{dx dy} = \int dx . Q \frac{d\delta z}{dx} - \int dx \int dy \frac{dQ}{dy}\frac{d\delta z}{dx} + const.$$

$$= \int dx . Q \frac{d\delta z}{dx} - \int dy \frac{dQ}{dy}\delta z + \iint dx dy \frac{d^2Q}{dx dy}\delta z + const.;$$

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy\, Q \frac{d^2\delta z}{dx dy} =$$

$$\left[\begin{array}{l} -\int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(Q \frac{d\delta z}{dx}\right)_{(y_0)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dy}\delta z\right)_{(x_0)} \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(Q \frac{d\delta z}{dx}\right)_{(y_\omega)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dy}\delta z\right)_{(x_\omega)} \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2 Q}{dx dy} \delta z \end{array}\right].$$

Mais on a

$$\int dx Q \frac{d\delta z}{dx} = Q dz - \int dx \frac{dQ}{dx} \delta z + const.$$

Ainsi l'expression précédente peut se changer en

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy\, Q \frac{d^2\delta z}{dx dy} =$$

$$\left[\begin{array}{l} (Q\delta z)_{(x_0, y_0)} + (Q\delta z)_{(x_\omega, y_0)} - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\frac{dQ}{dx}\delta z\right)_{(y_0)} \\ + \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dy}\delta z\right)_{(x_0)} \\ -(Q\delta z)_{(x_0, y_\omega)} + (Q\delta z)_{(x_\omega, y_\omega)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\frac{dQ}{dx}\delta z\right)_{(y_\omega)} \\ - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dy}\delta z\right)_{(x_\omega)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2 Q}{dx dy} \delta z \end{array}\right].$$

Le terme suivant contenant R subira la même transformation que le terme contenant P : il suffit de changer dans ce dernier cas x en y.

En substituant ces valeurs dans l'équation qui exprime la condition du maximum ou minimum, elle deviendra

$$\left[\begin{array}{l}(Q\delta z)_{(x_0,y_0)}-(Q\delta z)_{(x_\omega,y_0)}-(Q\delta z)_{(x_0,y_\omega)}+(Q\delta z)_{(x_\omega,y_\omega)}\\ -\int_{y_0}^{y_\omega}dy\left[\left(M-\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}+\text{etc.}\right)\delta z+(P-\text{etc.})\delta\frac{dz}{dx}+\text{etc.}\right]_{(x_0)}\\ +\int_{y_0}^{y_\omega}dy\left[\left(M-\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}+\text{etc.}\right)\delta z+(P-\text{etc.})\delta\frac{dz}{dx}+\text{etc.}\right]_{(x_\omega)}\\ -\int_{x_0}^{x_\omega}dx\left[\left(N-\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dy}+\text{etc.}\right)\delta z+(R-\text{etc.})\delta\frac{dz}{dy}+\text{etc.}\right]_{(y_0)}\\ +\int_{x_0}^{x_\omega}dx\left[\left(N-\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dy}+\text{etc.}\right)\delta z+(R-\text{etc.})\delta\frac{dz}{dy}+\text{etc.}\right]_{(y_\omega)}\\ +\int_{x_0}^{x_\omega}dx\int_{y_0}^{y_\omega}dy\left(L-\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}+\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dxdy}+\frac{d^2R}{dy^2}-\text{etc.}\right)\delta z\end{array}\right]$$

$$=0.$$

Cette équation doit subsister pour toutes les valeurs qui peuvent être attribuées aux variations des coordonnées des points intérieurs ou des points appartenant aux limites.

510. Nous aurons donc en premier lieu, l'équation indéfinie

$$0=L-\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}+\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2R}{dxdy}+\frac{d^2R}{dy^2}+\text{etc.},$$

qui doit être satisfaite pour toutes les valeurs des coordonnées comprises entre les limites.

511. Nous voyons en second lieu que l'on doit poser

$$0=(Q\delta z)_{(x_0,y_0)}-(Q\delta z)_{(x_\omega,y_0)}-(Q\delta z)_{(x_0,y_\omega)}+(Q\delta z)_{(x_\omega,y_\omega)},$$

en sorte que si les variations δz de l'ordonnée aux quatre sommets du rectangle, projection de la surface, sont arbitraires, il faudra que Q soit nulle pour les valeurs des coordonnées qui appartiennent à ces points.

De plus, nous avons l'équation

$$0 = \left(M - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \text{etc.}\right)\delta x + (P - \text{etc.})\,\delta\frac{dz}{dx} + \text{etc.}$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs appartenant aux points situés sur les limites de la surface, parallèles aux xz ; et enfin l'équation

$$0 = \left(N - \frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \text{etc.}\right)\delta z + (R - \text{etc.})\,\delta\frac{dz}{dy} + \text{etc.}$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs appartenant aux points situés sur les limites parallèles aux yz. Si les variations $\delta z, \delta\frac{dz}{dx}, \delta\frac{dz}{dy}$, etc., sont arbitraires, chaque terme de ces équations doit être égalé séparément à zéro.

Des cas où il existe des relations données entre les variables.

512. On a supposé généralement dans ce qui précède qu'il n'existait point de relations données d'avance entre les quantités qui entrent dans l'expression de la fonction V. Cependant la nature de la question établit le plus souvent des conditions auxquelles il est nécessaire d'avoir égard, en même temps que l'on satisfait à la condition du maximum ou minimum de l'intégrale définie proposée. L'effet des conditions dont il s'agit, est de restreindre l'étendue des valeurs qui peuvent être attribuée aux variations affectées du signe δ.

Si, par exemple, la valeur de l'intégrale définie proposée dépend de la figure d'une courbe, il peut se faire que les points extrêmes de cette courbe soient assujettis à se

trouver sur deux lignes données, ayant pour équations $y=\varphi(x), y=\psi(x)$. Les variations δx_0 et δy_0 des coordonnées du premier point, et les variations δx_ω et δy_ω des coordonnées du dernier point, devront alors avoir entre elles les rapports convenables pour qu'elles puissent satisfaire respectivement à ces équations. On aura donc ici

$$\delta y_0 = \frac{d \,.\, \varphi(x_0)}{dx}\,\delta x_0, \quad \text{et} \quad \delta y_\alpha = \frac{d \,.\, \psi(x_\alpha)}{dx}\,\delta x_\alpha,$$

équations qui devraient subsister en même temps que les équations déterminées obtenues conformément à ce qui a été dit dans les n°s 501 et 503.

Si de plus la direction de la tangente aux extrémités de la courbe cherchée devait s'accorder aussi avec la direction de la tangente des courbes ayant pour équations $y=\varphi(x), y=\psi(x)$, on aurait encore les équations

$$\delta\,\frac{dy_0}{dx} = \frac{d^2 \,.\, \varphi(x_0)}{dx^2}\,\delta x_0, \quad \text{et} \quad \delta\,\frac{dy_\alpha}{dx} = \frac{d^2 \,.\, \psi(x_\alpha)}{dx^2}\,\delta x_\alpha.$$

Et ainsi de suite pour les autres fonctions différentielles. Au moyen de ces *équations de condition*, on éliminerait une partie des variations qui se trouveraient dans les équations déterminées. Après cette élimination, les variations restant dans ces équations se trouvant entièrement arbitraires, on égalerait séparément à zéro chacun de leurs coefficients.

512. Il existe quelquefois des équations de condition qui doivent subsister pour toutes les valeurs des variables comprises dans les limites de l'intégrale définie proposée. Par exemple, si l'on demande de tracer sur une surface donnée, la ligne la plus courte entre deux

points pris sur cette surface, il est évident qu'en désignant son équation par

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'ordonnée de la ligne cherchée doit toujours satisfaire à cette équation. Dans un cas semblable, les variations des quantités qui entrent dans la fonction V étant restreintes par la condition que les valeurs de ces quantités satisfassent à l'équation donnée, cette équation doit subsister quand on y remplace ces quantités par leurs valeurs augmentées de ces variations. On peut donc différentier l'équation proposée par rapport aux quantités dont il s'agit, en marquant les différentielles par δ. Ainsi

$$L = 0,$$

étant en général une équation de condition, dans laquelle L désigne une fonction quelconque des variables indépendantes, des fonctions dépendantes de ces variables et de leurs fonctions dérivées, on formera l'équation

$$\delta L = 0,$$

δ indiquant une différentiation affectée par rapport à toutes ces quantités. Cette équation servira à éliminer une des variations qui se trouveront dans l'équation indéfinie que l'on forme en égalant à zéro le terme qui reste sous le signe d'intégration dans l'équation générale exprimant la condition du maximum ou minimum.

Il en serait de même s'il existait d'autres équations de condition

$$M = 0, \qquad N = 0, \qquad \text{etc.},$$

analogues à la précédente. On formerait également les équations

$$\delta M = 0, \qquad \delta N = 0, \qquad \text{etc.},$$

que l'on réunirait à l'équation indéfinie dont on vient de parler, afin d'éliminer autant de variations qu'il serait possible. Les coefficients des variations restantes seraient ensuite égalés séparément à zéro.

514. Dans d'autres questions, le maximum ou minimum cherché ne doit avoir lieu qu'autant qu'une certaine intégrale définie conserve une valeur déterminée. C'est ce qu'on nomme maximum ou minimum *relatif*. La recherche de la courbe qui, avec un contour donné, renferme l'aire la plus grande ou la moindre possible, est de ce genre. Il s'agit donc de rendre l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx . V$$

la plus grande ou la moindre possible, en même temps que l'on a l'équation

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx . U = const.,$$

U étant, aussi bien que V, une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc. Les conditions du problème donnent les deux équations

$$\delta \int_{x_0}^{x_\omega} dx . V = 0, \qquad \text{et} \qquad \delta \int_{x_0}^{x_\omega} dx . U = 0.$$

Or, l'expression de ces conditions ne sera pas altérée si l'on ajoute la seconde équation à la première, après l'avoir multipliée par une constante arbitraire a. On peut donc écrire

$$\delta\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\mathrm{V}+a\delta\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\mathrm{U}=0,\quad \text{ou}\quad \delta\int_{x_0}^{x_\omega} dx(\mathrm{V}+a\mathrm{U})=0.$$

On traitera cette dernière équation d'après les règles exposées ci-dessus, comme si l'on voulait rendre un maximum ou un minimum absolu la fonction

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\ (\mathrm{V}+a\mathrm{U}).$$

En effet, la relation entre y et z qui rendra cette fonction un maximum ou un minimum absolu, satisfait évidemment à la condition de rendre $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mathrm{V}$ un minimum ou maximum pour les cas où $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\,\mathrm{U}$ prend une valeur donnée ; car s'il en était autrement, il y aurait donc des valeurs de la somme des deux fonctions qui seraient plus grandes ou moindres que les valeurs données par le maximum ou minimum absolu, ce qui est impossible. La constante a se détermine de manière à donner à l'intégrale $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mathrm{U}$ la valeur que l'on a fixée dans chaque cas particulier.

Exemples de l'application du calcul des variations.

515. On se proposera en premier lieu de déterminer la ligne la plus courte qui puisse être tracée entre deux lignes courbes données. Les coordonnées de la ligne cherchée étant représentées par x,y,z, il s'agit donc de rendre un minimum la fonction

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

les limites x_0, x_ω étant variables. En appliquant à cette expression ce qui a été dit dans les nos 506 et 507, on verra d'abord que l'on a les deux équations indéfinies

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right)=0,$$

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right)=0,$$

d'où résulte

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=const.,$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=const.$$

On en conclut que les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ doivent avoir des valeurs constantes, propriété qui n'appartient qu'à la ligne droite. Posant donc

$$\frac{dy}{dx}=b, \qquad \frac{dz}{dx}=c,$$

on aura

$$y=bx+m, \qquad z=cx+n,$$

pour les équations de la ligne cherchée, b, c, m et n étant des constantes arbitraires.

A l'égard des conditions relatives aux limites, l'équation déterminée appartenant au premier point de la ligne cherchée est ici

$$0=-\sqrt{1+\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}.\delta x_0-$$

$$\frac{\frac{dy_0}{dx}.\left(\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right)+\frac{dz_0}{dx}\left(\delta z_0-\frac{dz_0}{dx}\delta x_0\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}}$$

qui se réduit à

$$0=\delta x_0+\frac{dy_0}{dx}\delta y_0+\frac{dz_0}{dx}\delta z_0.$$

Remarquons que dans cette équation $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ représentent respectivement les projections sur les axes des x, des y et des z, des déplacements qui peuvent être attribués au premier point de cette ligne. Or, d'après la supposition, ce point doit ici se trouver constamment sur la première des deux courbes entre lesquelles la ligne de plus courte distance doit être tracée. Donc les variations $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ peuvent être regardées comme les projections sur les axes de l'élément de cette courbe voisin du premier point dont il s'agit. D'où l'on conclut que l'équation précédente exprime la condition que la ligne de plus courte distance doit être perpendiculaire à cet élément.

On obtiendra une équation pareille pour l'autre extrémité de la ligne cherchée. La ligne la plus courte est donc une droite perpendiculaire aux deux courbes entre lesquelles elle est tracée.

On se trouverait conduit à un résultat semblable si la ligne de plus courte distance devait être menée entre

deux surfaces courbes données. Les variations $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ de l'équation précédente devraient être alors regardées comme exprimant les projections sur les axes d'un élément linéaire quelconque tracé à partir du premier point de cette ligne sur la surface courbe. Cette équation exprimerait donc que la ligne de plus courte distance doit être perpendiculaire à la surface.

Il en serait encore de même si la ligne de plus courte distance devait être tracée entre une courbe et une surface courbe donnée Elle devrait toujours rencontrer l'une et l'autre à angle droit.

516. Admettons maintenant que la ligne la plus courte doit être tracée sur une surface donnée. L'intégrale qu'il s'agit de rendre un minimum étant toujours

$$\int_{x_0}^{x_\alpha} dx.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

on doit, conformément au n° 507, poser en premier lieu [en écrivant pour abréger V au lieu de

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\Bigg],$$

l'équation indéfinie

$$0=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right)\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right)\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x\right);$$

et les variations $\delta x, \delta y, \delta z$ sont assujetties à satisfaire à l'équation de la surface que nous représentons par

$$z=F(x,y).$$

On a donc entre ces variations l'équation de condition

$$\delta z = \frac{dF}{dx}\,\delta x + \frac{dF}{dy}\,\delta y\,;$$

et si, après avoir mis au lieu de δz cette valeur dans l'équation précédente, on égale séparément à zéro les coefficients de δy et δz, qui restent indéterminés, il viendra

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\,\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\,\frac{dz}{dx}\right),$$

$$0 = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\,\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx} - \frac{dF}{dx}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\,\frac{dz}{dx}\right).$$

La ligne cherchée étant tracée sur la surface dont l'équation est $z=F(x,y)$, les éléments dx, dy, dz des coordonnées des points de cette ligne doivent satisfaire à cette équation, en sorte que l'on a $\frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\,\frac{dy}{dx}$. Cette valeur, substituée dans la seconde des deux équations ci-dessus, la rend identique avec la première, ainsi que cela doit être.

Cette première équation détermine la nature de la ligne de plus courte distance qui est l'objet de la question : elle en exprime une propriété géométrique qui consiste en ce que son plan osculateur est constamment perpendiculaire à la surface sur laquelle cette ligne est tracée.

En effet, l'équation du plan osculateur étant, d'après le n° 232

$$z = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\,\frac{d^2z}{dx^2}\right)x + \frac{d^2y}{dx^2}\,y}{\frac{d^2y}{dx^2}} + C\,;$$

et l'équation du plan tangent à la surface dont l'équation est $z=F(x,y)$ étant, d'après le n° 217

$$z = \frac{dF}{dx} x + \frac{dF}{dy} \cdot y + K,$$

C et K désignant des constantes ; la condition nécessaire pour que ces deux plans soient perpendiculaires l'un à l'autre est, par le n° 215

$$\frac{\frac{dF}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + 1 = 0;$$

ou, en éliminant $\frac{dF}{dx}$ au moyen de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx},$$

$$\left(\frac{dz}{dx} - \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$+ \frac{dF}{dy}\left[\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0,$$

résultat identique avec l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

ainsi qu'on peut le vérifier en effectuant dans cette dernière les différentiations indiquées.

Les conditions relatives aux limites se déduiront, comme dans le n° 515, en considérant d'abord le premier point de la courbe, de l'équation déterminée

$$0 = \delta x_0 + \frac{dy_0}{dx}\delta y_0 + \frac{dz_0}{dx}\delta z_0.$$

Si ce premier point est donné de position sur la surface, cette équation est satisfaite, puisque l'on a alors $\delta x_0=0, \delta y_0=0, \delta z_0=0$. Mais si la ligne de plus courte distance doit partir d'une ligne courbe donnée tracée sur la surface, les quantités $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$, expriment alors les projections sur les axes des x, des y, et des z, de l'élément de cette ligne courbe; et par conséquent, l'équation précédente montre que la ligne de plus courte distance doit être perpendiculaire à cet élément.

On obtiendrait un résultat analogue pour l'extrémité opposée. Ainsi la ligne la plus courte doit couper à angles droits les deux courbes entre lesquelles elle est tracée.

517. La recherche de la surface dont l'aire est un minimum, est un problème analogue au précédent. Nous supposerons que cette surface doit se terminer à un contour déterminé dont la projection sur le plan des x,y est donnée. L'intégrale qu'il s'agit de rendre un maximum est ici

$$\int_{x_0}^{x_\infty} dx \int_{y_0}^{y_\infty} dy \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1},$$

et on doit lui appliquer les notions exposées dans les nos 508 et suivants. Nous aurons donc, conformément au n° 511, l'équation indéfinie

$$0=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}\right)
+\frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}\right);$$

c'est-à-dire, en effectuant les différentiations indiquées,

$$0=\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1\right]\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dxdy}+\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+1\right]\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Cette équation aux différences partielles du second ordre appartient à la surface demandée. Les fonctions arbitraires qui entreront dans son intégrale devraient être déterminées de manière à faire passer la surface par le contour donné. Lorsque ce contour est fixé, les équations déterminées relatives aux limites de l'intégrale sont vérifiées d'avance, et ne donnent lieu à aucune condition particulière.

518. Considérons encore le plus simple des problèmes connus sous le nom d'Isopérimètres, dont l'objet consiste à déterminer la figure de la courbe qui, sous un contour donné, comprend la plus grande aire possible. Il s'agit de rendre un maximum la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_\alpha} dx \,.\, y,$$

tandis que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_\alpha} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

conserve une valeur déterminée. Cette question se résout, conformément à ce qui a été dit n° 514, en déterminant les conditions du maximum absolu de la fonction

$$\int_{x_0}^{x_\alpha} dx\left[y+a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right],$$

a désignant un nombre indéterminé. Nous supposerons

les limites x_0 et x_ω invariables. En appliquant donc les notions exposées n° 499 et suivants, l'équation indéfinie du n° 501, sera ici

$$0=1-a\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right),$$

d'où l'on tire en intégrant une première fois

$$x-\alpha-a\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=0, \quad \text{ou} \quad dy=\frac{(x-\alpha)dx}{\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}},$$

α étant une constante arbitraire; et en intégrant une seconde fois,

$$y-6=-\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}, \qquad \text{ou} \qquad (x-\alpha)^2+(y-6)^2=a^2,$$

6 étant la seconde constante arbitraire. Ainsi le cercle résout en général la question proposée. La position du centre et le rayon peuvent être déterminés de manière à faire passer la circonférence par deux points donnés, et à donner à l'arc compris entre ces points une valeur déterminée.

519. Nous traiterons enfin la question de la brachystochrône, ou courbe de la plus vite descente, en supposant que la vitesse initiale du mobile soumis à l'action de la gravité est nulle, et qu'il doit passer dans le moindre temps possible d'un point quelconque d'une courbe donnée à un point quelconque d'une autre courbe également donnée. L'axe des x étant supposé vertical, la fonction qu'il s'agit de rendre un minimum est

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x-x_0}},$$

x_0 et x_ω représentant les abscisses des points extrêmes de la courbe décrite. Ces abscisses étant variables, on doit opérer ici conformément à ce qui a été dit dans les n°ˢ 505 et 507. Il faut remarquer de plus que la quantité x_0 entre dans la fonction qui se trouve sous le signe $\int$. Nous avons en comparant aux formules des numéros cités :

$$\mathrm{V}=\sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x-x_0}},$$

$$\mathrm{N}=0,\ \mathrm{P}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}};$$

$$n=0,\ p=\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}.$$

Les équations indéfinies qui doivent subsister pour tous les points de la ligne cherchée sont

$$\frac{d\mathrm{P}}{dx}=0, \qquad \frac{dp}{dx}=0;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=\mathrm{B},$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=\mathrm{C},$$

B et C étant des constantes. Ces équations donnent

$$\frac{dz}{dy}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}},$$

d'où l'on conclut en premier lieu que la projection de la courbe cherchée sur le plan horizontal des yz est une ligne droite, et par conséquent que cette courbe est contenue dans un plan vertical.

Pour reconnaître la nature de la courbe dont il s'agit, on peut supposer que le plan vertical des xy se confond avec celui dans lequel elle est placée. Son équation différentielle se réduira alors à

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\mathrm{B};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x-x_0}{\frac{1}{\mathrm{B}^2}-(x-x_0)}},$$

équation qui appartient à une cycloïde dont la base est une ligne horizontale passant par le point de départ du mobile. Le diamètre du cercle générateur est représenté par la constante $\frac{1}{\mathrm{B}^2}$. On voit que le premier élément de la courbe de la plus vite descente sera toujours vertical.

A l'égard des conditions relatives aux limites de l'intégrale, l'équation déterminée donnée par les termes qui ne sont point sous le signe d'intégration, est ici

$$\left[\begin{array}{l} -V_0\delta x_0 - P_0\left(\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right) - p_0\left(\delta z_0 - \frac{dz_0}{dx}\delta x_0\right) \\ +V_\alpha\delta x_\alpha + P_\alpha\left(\delta y_\alpha - \frac{dy_\alpha}{dx}\delta x_\alpha\right) + p_\alpha\left(\delta z_\alpha - \frac{dz_\alpha}{dx}\delta x_\alpha\right) \\ +\delta x_0\int_{x_0}^{x_\alpha} dx.\mu \end{array}\right] = 0;$$

et l'on a

$$\mu = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{2(x-x_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

On trouvera la valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_\alpha} dx\mu$ en remarquant que la différentielle complète de la fonction V est

$$dV = -\mu dx + Pd\left(\frac{dy}{dx}\right) + pd\left(\frac{dz}{dx}\right).$$

Mais on a vu ci-dessus que les fonctions P et p devaient être constantes dans toute l'étendue de la courbe. On peut donc écrire P_α et p_α au lieu de P et p, ce qui donne

$$dV = -\mu dx + P_\alpha d\left(\frac{dy}{dx}\right) + p_\alpha d\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\int_{x_0}^{x_\alpha} dx.\mu = V_0 - V_\alpha + P_\alpha\left(\frac{dy_\alpha}{dx} - \frac{dy_0}{dx}\right) + p_\alpha\left(\frac{dz_\alpha}{dx} - \frac{dz_0}{dx}\right).$$

Substituant cette valeur dans l'équation déterminée

précédente, et remarquant que $P_0 = P_\omega$ et $p_0 = p_\omega$, on trouve

$$\left[\begin{array}{l} -V_\omega \delta x_0 - P_\omega \left(\delta y_0 - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_0\right) - p_\omega \left(\delta z_0 - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_0\right) \\ +V_\omega \delta x_\omega + P_\omega \left(\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) + p_\omega \left(\delta z_\omega - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) \end{array}\right] = 0,$$

ou, en remplaçant V_ω, P_ω et p_ω par leurs valeurs,

$$0 = \left[\begin{array}{l} -\delta x_0 - \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_0 - \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_0 \\ +\delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_\omega \end{array}\right].$$

Les variations des coordonnées des deux points extrêmes de la courbe étant respectivement indépendantes l'une de l'autre, cette équation se partage dans les deux suivantes

$$0 = \delta x_0 + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_0 + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_0$$

$$0 = \delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_\omega,$$

qui indiquent évidemment que le dernier élément de la courbe cherchée doit être perpendiculaire à la fois aux tangentes menées aux deux courbes données dans les points de départ et d'arrivée du mobile. Il en résulte que si les deux courbes étaient données dans un même plan vertical, leurs tangentes menées aux points extrêmes de la brachystochrône devraient être parallèles entre elles.

Ainsi la courbe demandée est une portion de cycloïde dont la base est horizontale et dont l'origine est au point

de départ du mobile. Elle coupe à angles droits la courbe d'arrivée, et l'origine est tellement placée sur la courbe de départ, que la tangente menée par cette origine à cette courbe est perpendiculaire à la tangente menée à l'extrémité inférieure de la portion cycloïdale.

XL. CALCUL DES DIFFÉRENCES FINIES.

520. Le caractère de l'analyse différentielle, et ce qui la distingue de l'analyse ordinaire, ou de l'analyse algébrique, consiste en ce qu'on y regarde les quantités comme variables, et que l'on considère à la fois la succession infinie des valeurs qui peuvent leur être attribuées ; tandis que dans l'analyse algébrique on regarde toujours les quantités comme ayant des valeurs déterminées connues ou inconnues. Dans le calcul différentiel proprement dit, les valeurs successives des quantités sont censées se succéder d'une manière continue, et par intervalles infiniment petits, c'est-à-dire plus petits que toute grandeur donnée. L'objet principal de ce calcul consiste dans la recherche des rapports qui existent entre les variations correspondantes des variables et des fonctions dépendantes de ces variables, rapports qui donnent naissance à de nouvelles fonctions dont la considération est nécessaire dans les applications principales des mathématiques aux arts et à la philosophie naturelle. Dans le calcul aux différences, les quantités sont supposées varier par intervalles déterminés et d'une grandeur finie. Cette partie de l'analyse considère d'ailleurs, aussi bien que le calcul différentiel, les relations qui existent entre les variations des variables et celles des fonctions qui en dépendent.

521. Le calcul des différences finies est fondé sur

un algorithme qu'il faut d'abord faire connaître. Soit u une fonction quelconque d'une ou de plusieurs variables indépendantes x, y, z, etc. La composition de la fonction u est donnée, et l'on regarde les variables indépendantes comme pouvant prendre successivement plusieurs valeurs déterminées x_0, y_0, z_0, etc. ; x_1, y_1, z_1, etc.; x_2, y_2, z_2, etc. ; x_3, y_3, z_3, etc. ; et ainsi de suite. Le plus ordinairement ces variables sont supposées varier par différences constantes, et quelquefois par intervalles égaux à l'unité. La loi de cette variation, quelle qu'elle puisse être, est supposée donnée. En vertu des variations dont il s'agit, la fonction u prendra également une suite de valeurs déterminées, que nous représenterons par

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; u_3, \; u_4 \ldots\ldots\ldots u_{n-1}, \; u_n;$$

et nous écrirons comme dans l'article VI,

u_0			
u_1	$u_1 - u_0 = \Delta u_0$		
u_2	$u_2 - u_1 = \Delta u_1$	$\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0$	
u_3	$u_3 - u_2 = \Delta u_2$	$\Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1$	etc.
u_4	$u_4 - u_3 = \Delta u_3$	$\Delta u_3 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_2$	
	. . . .	$\Delta u_4 - \Delta u_3 = \Delta^2 u_3$	
	. . . .	. . . .	
u_{n-1}	. . . .	. . . .	
u_n	$u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1}$	. . . .	
		$\Delta u_n - \Delta u_{n-1} = \Delta^2 u_{n-1}$	

On voit que le signe Δ indique la différence entre la valeur actuelle de la quantité affectée de ce signe, et la valeur que reçoit cette quantité par l'effet d'un changement fini, attribué aux valeurs des variables dont elle dépend. Δu_0 est la *différence* de la fonction u_0. On re-

présente par $\Delta\Delta u_0$, ou $\Delta^2 u_0$, la différence de Δu_0, ou la *différence seconde* de la fonction u_0. On représente également par $\Delta\Delta^2 u_0$, ou $\Delta^3 u_0$, la différence de $\Delta^2 u_0$, ou la *différence troisième* de la fonction u_0. Et ainsi de suite. Il existe entre les valeurs successives d'une fonction et ses différences de divers ordres des relations générales, et tout à fait indépendantes de la nature de cette fonction et de la loi de sa variation.

522. En effet, on trouve par de simples substitutions, comme on l'a vu dans l'article X,

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0$$
$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0$$
$$u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$$
$$u_4 = u_0 + 4\Delta u_0 + 6\Delta^2 u_0 + 4\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0$$

. . . .

. . . .

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + .. + \Delta^n u_0,$$

formule qui peut s'écrire d'une manière abrégée

$$u_n = (1 + \Delta u_0)^n,$$

en observant de changer, après le développement de la puissance indiquée, $(\Delta u_0)^r$ en $\Delta^r u_0$.

523. On trouve également, par des substitutions successives :

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0$$
$$\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0$$
$$\Delta^3 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0$$
$$\Delta^4 u_0 = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n u_0 = u_n - n.u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u_{n-3} + \ldots \pm u_0$$

Cette formule peut s'écrire

$$\Delta^n u_0 = (u_0 - 1)^n ,$$

en observant de changer, après le développement, u^r en u_r. Elle peut servir à trouver directement les différences d'un ordre quelconque d'une fonction proposée, au moyen d'un certain nombre de valeurs successives de cette fonction. Le nombre des valeurs qu'il est nécessaire de connaître est égal à l'ordre de la différence cherchée.

524. On indique par le signe Σ une opération inverse de celle qui est indiquée par le signe Δ. Ainsi Σu_0 représente la quantité dont la différence est u_0. Nous écrirons donc, en continuant le tableau précédent vers la gauche,

etc.,	$\Sigma^2 u_1 - \Sigma^2 u_0 = \Sigma u_0$		
	$\Sigma^2 u_2 - \Sigma^2 u_1 = \Sigma u_1$	$\Sigma u_1 - \Sigma u_0 = u_0$	u_0
	$\Sigma^2 u_3 - \Sigma^2 u_2 = \Sigma u_2$	$\Sigma u_2 - \Sigma u_1 = u_1$	u_1
	$\Sigma^2 u_4 - \Sigma^2 u_3 = \Sigma u_3$	$\Sigma u_3 - \Sigma u_2 = u_2$	u_2
	. . . .	$\Sigma u_4 - \Sigma u_3 = u_3$	u_3
	. . . .	. . . .	. . .
	. . . .	. . . .	. . .
	$\Sigma^2 u_{n+1} - \Sigma^2 u_n = \Sigma u_n$	. . . .	. . .
		$\Sigma u_{n+1} - \Sigma u_n = u_n$	u_n ;
			u_{n+1}

d'où l'on déduit

$$\Sigma u_1 = \Sigma u_0 + u_0$$
$$\Sigma u_2 = \Sigma u_0 + u_0 + u_1$$
$$\Sigma u_3 = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2$$
$$\Sigma u_4 = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$
. . . .
. . . .
$$\Sigma u_n = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1}.$$



On voit que Σu_n, ou l'intégrale finie de u_n, c'est-à-dire la quantité dont la différence est u_n, se forme de l'addition des n valeurs de la fonction u qui précèdent la valeur u_n, et d'une quantité Σu_0 qu'il faut regarder ici en général comme une constante arbitraire. En effet, supposant u donnée, et par conséquent u_0, u_1, u_2, u_3, etc., on n'a assujetti, en écrivant les équations précédentes, les quantités Σu et Σu_0 à aucune autre condition, si ce n'est celle d'avoir pour différence u_0. Donc l'une de ces quantités est une constante arbitraire.

On déduit également des équations précédentes;

$$\Sigma^2 u_1 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0$$
$$\Sigma^2 u_2 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1$$
$$\Sigma^2 u_3 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2$$
$$\Sigma^2 u_4 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2 + u_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma^2 u_n = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2 + \Sigma u_3 + \ldots\ldots + \Sigma u_{n-1};$$

puis

$$\Sigma^3 u_1 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0$$
$$\Sigma^3 u_2 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1$$
$$\Sigma^3 u_3 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2$$
$$\Sigma^3 u_4 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2 + \Sigma^2 u_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma^3 u_n = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2 + \Sigma^2 u_3 + \ldots\ldots + \Sigma^2 u_{n-1};$$

et ainsi de suite. On a en général

$$\Sigma^i u_n = \Sigma^i u_0 + \Sigma^{i-1} u_0 + \Sigma^{i-1} u_1 + \Sigma^{i-1} u_2 + \ldots + \Sigma^{i-1} u_{n-1}.$$

On doit remarquer que dans la valeur de $\Sigma^2 u_n$, il entre deux constantes arbitraires, qui sont $\Sigma^2 u_0$ et Σu_0. Dans la valeur de $\Sigma^3 u_n$, il entre explicitement les deux arbitraires $\Sigma^3 u_0$ et $\Sigma^2 u_0$, et implicitement l'arbitraire Σu_0 qui

est comprise dans $\Sigma^2 u_1$, $\Sigma^2 u_2$, etc., et ainsi de suite. Enfin dans la valeur de $\Sigma^i u_n$, il entre explicitement les deux arbitraires $\Sigma^i u_0$ et $\Sigma^{i-1} u_0$, et implicitement les $i-2$ arbitraires $\Sigma^{i-2} u_0, \Sigma^{i-3} u_0$, $\Sigma^{i-4} u_0, \ldots\ldots \Sigma u_0$ qui sont comprises dans $\Sigma^{i-1} u_1, \Sigma^{i-1}{}_2, \Sigma^{i-1} u_3$, etc. ; en sorte que l'intégrale $\Sigma^i u_n$ comprend toujours i constantes arbitraires.

525. Nous devons remarquer d'ailleurs qu'il n'est pas toujours indispensable que dans l'intégrale

$$\Sigma u_n = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1},$$

la quantité désignée par Σu_0, qui la complète, soit une constante. On pourrait prendre pour cette quantité une fonction quelconque des variables qui entrent dans la fonction u, pourvu que la fonction dont il s'agit eût la propriété de ne point changer de valeur lorsque ces variables prendraient leurs valeurs successives. On sait qu'il existe plusieurs fonctions trigonométriques qui présentent cette propriété quand on fait varier les variables par différences constantes.

Différentiation des fonctions.

526. Soit u une fonction contenant une seule variable x. Différentier la fonction u, c'est chercher la valeur de l'accroissement Δu que reçoit cette fonction lorsque la variable x devient $x+\Delta x$. Ainsi de l'équation

$$u = f(x),$$

nous concluons en général

$$\Delta u = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Si la fonction u contient plusieurs variables indépendantes x, y, z, etc., cette fonction peut être différentiée

séparément par rapport à chacune des variables. Posant

$$u=f(x,y,z, \text{etc.},),$$

ces différences sont exprimées séparément par

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x=f(x+\Delta x,y,z, \text{etc.},)-f(x,y,z, \text{etc.}),$$
$$\frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y=f(x,y+\Delta y,z, \text{etc.},)-f(x,y,z, \text{etc.}),$$
$$\frac{\Delta u}{\Delta z}\Delta z=f(x,y,z+\Delta z, \text{etc.},)-f(x,y,z, \text{etc.}),$$
etc.

La *différence totale* est

$$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \text{etc.})-f(x, y, z, \text{etc.}).$$

Cette différence totale n'est pas, en général, égale à la somme des différences partielles. Elle le serait si la fonction $f(x,y,z, \text{etc.})$ était une fonction rationnelle et entière, et si les variables x,y,z, etc. n'étaient pas multipliées les unes par les autres.

527. Considérons en premier lieu les fonctions rationnelles et entières d'une seule variable x. Elles sont composées de termes de la forme Ax^k, A et k étant des constantes : la recherche de leurs différences se réduit à trouver celles de la quantité x^k.

Nous avons généralement

$$\Delta . x^k=(x+\Delta x)^k-x^k,$$

ou bien

$$\Delta . x^k=k\,x^{k-1}\Delta x+\frac{k(k-1)}{1.2}x^{k-2}(\Delta x)^2$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}x^{k-3}(\Delta x)^3+\ldots\ldots+(\Delta x)^k.$$

Si la différence Δx est supposée constante, on obtient facilement l'expression générale de la différence d'un ordre quelconque de la fonction proposée. En effet on a alors

$$\begin{aligned} u_0 &= x^k, \\ u_1 &= (x+\ \Delta x)^k, \\ u_2 &= (x+2\Delta x)^k, \\ u_3 &= (x+3\Delta x)^k, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et la formule du n° 523 donne

$$\Delta^n . x^k = (x+n\Delta x)^k - n[x+(n-1)\Delta x]^k + \frac{n(n-1)}{1.2}[x+(n-2)\Delta x]^k - \text{etc.};$$

ou en développant et ordonnant par rapport aux puissances de Δx,

$$\Delta^n . x^k = \left[\begin{array}{l} \left[1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\dots\dots\dots\dots\right]x^k \\ +k\left[n-\frac{n}{1}(n-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)-\dots\dots\right]x^{k-1}\Delta x \\ +\frac{k(k-1)}{1.2}\left[n^2-\frac{n}{1}(n-1)^2+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^2-\dots\right]x^{k-2}(\Delta x)^2 \\ +\text{etc.}, \end{array}\right]$$

expression dont la loi est évidente.

528. Nous remarquerons d'ailleurs : 1° que le terme affecté de x^k est nul, quel que soit le nombre entier n, comme on peut le vérifier ; 2° que la quantité

$$n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^i + \text{etc.}$$

est également nulle, tant que i est plus petit que n, ce

que l'on peut également vérifier, et ce qui doit être, puisque l'expression $\Delta^n.x^i$ ne peut pas contenir de puissances de Δx inférieures à la puissance n; 3° enfin que l'on a toujours

$$1.2.3\ldots\ldots n = n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n - \text{etc.},$$

comme on peut s'en assurer. Nous écrirons donc simplement au lieu de l'expression précédente

$$\Delta^n.x^k =$$

$$\left[\begin{array}{l}
k(k-1)(k-2)\ldots\ldots\ldots(k-n+1)\;x^{k-n}\Delta x^n \\
+\dfrac{k(k-1)(k-2)\ldots\ldots(k-n)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(n+1)}\Big[n^{n+1} - n(n-1)^{n+1} \\
\qquad + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+1} - \ldots\ldots\Big]\,x^{k-n-1}\Delta x^{n+1} \\
+\dfrac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(n+1)]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(n+2)}\Big[n^{n+2} - n(n-1)^{n+2} \\
\qquad + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+2} - \ldots\ldots\Big]\,x^{k-n-2}\Delta x^{n+2} \\
+\dfrac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(n+2)]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(n+3)}\Big[n^{n+3} - n(n-1)^{n+3} \\
\qquad + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+3} - \ldots\ldots\Big]\,x^{k-n-3}\Delta x^{n+3} \\
+\text{etc.}\ldots\ldots
\end{array}\right]$$

On peut remarquer que dans le cas où l'exposant k est un nombre entier et positif: 1° la valeur de la différence de l'ordre k de la fonction x^k se réduit à une constante dont l'expression est

$$\Delta^k.x^k = k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots\ldots3.2.1\,\Delta x^k;$$

2° l'expression précédente de $\Delta^n . x^h$ se termine alors par un dernier terme qui est

$$\left[n^k - n(n-1)^k + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^k - \ldots\ldots\right]\Delta x^k.$$

Ces résultats donneront les différences d'un ordre quelconque de toutes les fonctions de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{etc.}$$

528. Parmi les fonctions rationnelles on distingue, à raison de la simplicité de l'expression de leurs différences, les produits de facteurs équi-différents, tels que la fonction

$$u = (a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots[a+x+(k-1)\Delta x].$$

On trouve facilement

$$\Delta^n u = [a+x+n\Delta x]\,[a+x+(n-1)\Delta x]\ldots\ldots[a+x+(k-1)\Delta x]$$
$$\times k(k-1)(k-2)\ldots\ldots(k-n+1).\Delta x^n.$$

529. Quant aux fonctions fractionnaires, on en obtient les différences en les décomposant en fractions simples par les méthodes connues. L'expression de la différence se simplifie lorsque le numérateur est une constante et le dénominateur un produit de facteurs équi-différents. Soit

$$u = \frac{A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots[a+x+(k-1)\Delta x]};$$

on a

$$\Delta^n u = \frac{\pm A.k(k+1)(k+2)\ldots\ldots(k+n-1).\Delta x^n}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots[a+x+(k+n-1)\Delta x]}.$$

Les signes + ou — ont lieu respectivement lorsque n est pair ou impair.

530. Nous considérerons maintenant les fonctions transcendantes. Soit

$$u = \log. x :$$

nous aurons

$$\Delta u = \log.(x + \Delta x) - \log. x = \log. \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

et en développant

$$\Delta u = \mathrm{M}\left[\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^4 + \text{etc.}\right].$$

Si la différence Δx est supposée constante, on a

$$u_1 = \log.(x + \Delta x) = \log. \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) + \log. x,$$

$$u_2 = \log.(x + 2\Delta x) = \log. \left(1 + \frac{2\Delta x}{x}\right) + \log. x,$$

$$u_3 = \log.(x + 3\Delta x) = \log. \left(1 + \frac{3\Delta x}{x}\right) + \log. x,$$

etc.

En développant ces expressions et les substituant dans les formules du n° 523, on trouvera

$$\Delta \log. x = \mathrm{M}\left[\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \text{etc.}\right],$$

$$\Delta^2 \log. x = \mathrm{M}\left[\quad - \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \text{etc.}\right],$$

$$\Delta^3 \log. x = \mathrm{M}\left[\quad \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \text{etc.}\right],$$

etc.

M est le module logarithmique, c'est-à-dire le nombre par lequel il faut multiplier les logarithmes hyperboliques pour avoir ceux du système de logarithmes dans lequel on calcule.

331. La fonction exponentielle a^x donne, en supposant toujours la différence Δx constante,

$$\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$
$$\Delta^2 a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^2$$
$$\Delta^3 x^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^n a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^n.$$

332. A l'égard des fonctions trigonométriques, en partant des formules connues

$$\sin.\mathrm{A} - \sin.\mathrm{B} = 2\sin.\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}).\cos.\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}),$$

$$\cos.\mathrm{A} - \cos.\mathrm{B} = -2\sin.\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}).\cos.\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}),$$

on trouve

$$\Delta\sin.x = \sin.(x+\Delta x) - \sin.x = 2\sin.\frac{1}{2}\Delta x.\cos.\frac{1}{2}(2x+\Delta x),$$

$$\Delta\cos.x = \cos.(x+\Delta x) - \cos.x = -2\sin.\frac{1}{2}\Delta x.\sin.\frac{1}{2}(2x+\Delta x);$$

puis

$$\Delta^2\sin.x = 2\sin.\frac{1}{2}\Delta x\left[\cos.\frac{1}{2}(2x+3\Delta x) - \cos.\frac{1}{2}(2x+\Delta x)\right]$$

$$= -4\sin.^2\frac{1}{2}\Delta x.\sin.(x+\Delta x).$$

Et en continuant de la même manière, on parvient aux formules générales

$$\Delta^{2n}\sin.x = \pm 2^{2n}\sin.^{2n}\frac{1}{2}\Delta x.\sin.\frac{1}{2}(2x+2n\Delta x)$$

$$\Delta^{2n+1}\sin.x = \pm 2^{2n+1}\sin.^{2n+1}\frac{1}{2}\Delta x.\cos.\frac{1}{2}\left[2x+(2n+1)\Delta x\right].$$

Les signes + ou — ont lieu respectivement suivant que le nombre n est pair ou impair.

La différence de l'ordre n de la fonction $\sin. x$ s'exprime d'une manière encore plus simple au moyen des différences des ordres $n-1$ et $n-2$. On obtient en effet l'expression

$$\Delta^n \sin. x = -2^2 \sin.^2 \frac{1}{2} \Delta x \,(\Delta^{n-1} \sin. x + \Delta^{n-2} \sin. x),$$

qui se déduit des précédentes.

533. On pourra toujours, d'après ce qui précède, et conformément à ce qu'on a vu n° 526, obtenir les différences partielles ou totales des fonctions de plusieurs variables.

Soit par exemple la fonction

$$u = xy:$$

on trouve, en supposant Δx constante

$$\Delta u = (x + \Delta x)\, \Delta y + \Delta x \,.\, y$$
$$\Delta^2 u = (x + 2\Delta x)\, \Delta^2 y + 2\Delta x \,.\, \Delta y$$
$$\Delta^3 u = (x + 2\Delta x)\, \Delta^3 y + 3\Delta x \,.\, \Delta y$$
etc.

Soit encore la fonction

$$u = \frac{x}{y}:$$

on aura

$$\Delta u = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}\left[1 - \frac{\Delta y}{\Delta} + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

534. Les différences totales des fonctions de plusieurs variables s'expriment au moyen de leurs différences partielles, par des formules remarquables. Soit u une fonction des deux variables x, y, dont nous supposons les différences Δx et Δy constantes. On a

$$\Delta u = \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}\Delta x \Delta y,$$

expression qui peut s'écrire

$$\Delta u=\left[\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\,\Delta x\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta y}\,\Delta y\right)-1\right]u.$$

Et l'on trouvera

$$\Delta^2 u=\left[\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\,\Delta x\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta y}\,\Delta y\right)-1\right]^2 u$$

$$\Delta^3 u=\left[\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\,\Delta x\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta y}\,\Delta y\right)-1\right]^3 u$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n u=\left[\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\,\Delta x\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta y}\,\Delta y\right)-1\right]^n u.$$

On obtient des formules analogues lorsque la fonction proposée contient un plus grand nombre de variables. Si u contient les trois variables x,y,z, on a également

$$\Delta^n u=\left[\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\,\Delta x\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta y}\,\Delta y\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta z}\,\Delta z\right)-1\right]^n u;$$

et ainsi de suite.

Intégration des fonctions.

535. Soit en premier lieu la fonction x^m. En écrivant $m+1$ au lieu de k dans la formule du n° 527, elle devient

$$\Delta . x^{m+1}=\frac{m+1}{1}\,x^m(\Delta x)+\frac{m+1}{1}\,\frac{m}{2}\,x^{m-1}(\Delta x)^2+\ldots\ldots+(\Delta x)^{m+1}$$

et donne, en prenant l'intégrale de chaque membre,

$$x^{m+1}=\frac{m+1}{1}\,\Sigma x^m.(\Delta x)+\frac{m+1}{1}\,\frac{m}{2}\,\Sigma x^{m-1}(\Delta x)^2+\ldots+\Sigma x^0(\Delta x)^{m+1};$$

d'où l'on déduit

$$\Sigma x^m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x}-\frac{1}{m+1}\left[\frac{m+1}{1}\,\frac{m}{1}\,(\Delta x)\Sigma x^{m-1}\right.$$
$$\left.+\frac{m+1}{1}\,\frac{m}{2}\,\frac{m-1}{3}\,(\Delta x)^2\Sigma x^{m-2}+\ldots\ldots+(\Delta x)^m\,\Sigma x^0\right].$$

Si l'on fait successivement dans cette formule $m=0$, $=1,=2$, etc., on trouvera

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{\Delta x}$$

$$\Sigma x^1 = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\Delta x$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2\Delta x$$

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\Delta x} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\Delta x - \frac{1}{30}x(\Delta x)^3$$

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\Delta x} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4\Delta x - \frac{1}{12}x^2(\Delta x)^3$$

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\Delta x} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{6}x^5\Delta x - \frac{1}{6}x^3(\Delta x)^3 + \frac{1}{42}x(\Delta x)^5$$

etc.

Chacune de ces intégrales doit être complétée par une constante arbitraire. Cette constante se détermine lorsqu'on fixe en même temps le premier terme de la série des quantités $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots$ ou $x_0, x_0+\Delta x, x_0+2\Delta x$, etc.; et le premier terme de la série des quantités $\Sigma x_0, \Sigma x_1, \Sigma x_2$, etc.

Ces résultats donneront les intégrales de toutes les fonctions algébriques rationnelles et entières, l'incrément Δx étant supposé constant.

536. On a, d'après le n° 528, en écrivant m au lieu de $k-1$,

$$\Delta\{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)\} =$$
$$(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x).(m+1)\Delta x;$$

et par conséquent en intégrant de part et d'autre,

$$\Sigma\left\{(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)\right\}=$$
$$\frac{1}{(m+1)\Delta x}(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots(a+x+m\Delta x)+const.$$

537. On a également, d'après le n° 529,

$$\Delta\left\{\frac{A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots[a+x+(m+1)\Delta x]}\right\}=$$
$$\frac{-Am\Delta x}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)};$$

et par conséquent

$$\Sigma\left[\frac{A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)}\right]=$$
$$\frac{1}{m\Delta x}\,\frac{-A}{(a+x)(a+x\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots[a+x+(m-1)\Delta x]}+const.$$

538. L'équation

$$\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x}-1)$$

du n° 531 donne

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}+C,$$

C étant la constante arbitraire; d'où l'on passe facilement à

$$\Sigma^2 a^x = \frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^2}+\Sigma C$$
$$\Sigma^3 a^x = \frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^3}+\Sigma^2 C$$

. . . .

. . . .

$$\Sigma^n a^x = \frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^n}+\Sigma^{n-1} C.$$

Quant aux expressions $\Sigma C, \Sigma^2 C, \ldots \Sigma^{n-1} C$, il faut remarquer que, d'après le n° 535, $\Sigma x^0 = \Sigma 1 = \frac{x}{\Delta x}$. Donc $\Sigma C = \frac{Cx}{\Delta x} + C'$, C étant une nouvelle constante arbitraire. Les formules du même numéro donneront également les expressions $\Sigma^2 C, \Sigma^3 C$, etc.; et l'on voit que l'intégrale $\Sigma^n a^x$ contiendra n constantes arbitraires, conformément à ce qui a été dit n° 523.

539. A l'égard des fonctions circulaires, l'équation

$$\Delta \cos. x = -2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x . \sin. \left(x + \frac{1}{2} \Delta x \right)$$

du n° 532 donne

$$\sin. \left(x + \frac{1}{2} \Delta x \right) = - \frac{\Delta \cos. x}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x}, \text{ et } \sin. x = - \frac{\Delta \cos. \left(x - \frac{1}{2} \Delta x \right)}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x};$$

d'où, en intégrant,

$$\Sigma \sin. x = - \frac{\cos. \left(x - \frac{1}{2} \Delta x \right)}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x} + const.$$

On déduira de la même manière de l'équation

$$\Delta \sin. x = 2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x . \cos. \left(x + \frac{1}{2} \Delta x \right)$$

du même numéro,

$$\Sigma \cos. x = \frac{\sin. \left(x - \frac{1}{2} \Delta x \right)}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x}.$$

On peut, au moyen de ces formules, intégrer les

fonctions composées de termes de la forme $\sin^m x.\cos^n x$ lorsque m et n sont des nombres entiers et positifs. En effet, ces fonctions peuvent être transformées en une suite de termes contenant les sinus ou cosinus des arcs multiples de l'arc x; et l'on a évidemment

$$\Sigma \sin.(p+qx) = -\frac{\cos.\left(p+qx-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x}$$

$$\Sigma \cos.(p+qx) = \frac{\sin.\left(p+qx-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x}.$$

540. Si l'on cherche à appliquer aux intégrales finies le procédé de l'intégration par parties, on posera, en désignant par P, Q deux fonctions quelconques de la variable x,

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P + z,$$

z étant une fonction de la même variable, qu'il s'agit de déterminer. Différentiant chaque membre de l'équation, il viendra

$$PQ = (Q+\Delta Q).\Sigma(P+\Delta P) - Q.\Sigma P + \Delta z,$$

ou, (en remarquant que $\Sigma.\Delta P = P$),

$$0 = \Delta Q.\Sigma(P+\Delta P) + \Delta z, \quad \text{d'où} \quad z = -\Sigma[\Delta Q.\Sigma(P+\Delta P)].$$

Donc

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Sigma[\Delta Q.\Sigma(P+\Delta P],$$

ou

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Sigma(\Delta Q.\Sigma P_{,});$$

et par suite

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.\Sigma^2 P_1 + \Sigma(\Delta^2 Q.\Sigma^2 P_2),$$

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q.\Sigma^3 P_2 - \Sigma(\Delta^3 Q.\Sigma^3 P_3),$$

etc.

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.(\Sigma^2 P_1) + \Delta^2 Q.\Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q.\Sigma^4 P_3) + \Delta^4 Q\ \Sigma^5 P_4 - \text{etc.}$$

Cette formule peut être mise aussi sous la forme

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.(\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q.(\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P)$$
$$- \Delta^3 Q.(\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \text{etc.}$$

Elle s'arrête lorsque les différences d'*un ordre quelconque* de la fonction Q deviennent constantes.

Sommation des suites.

541. On a vu, n° 523, que l'on avait généralement

$$\Sigma u_n = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1},$$

formule dans laquelle Σu_0 représente une constante arbitraire. Par conséquent, si nous écrivons

$$Su_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_n;$$

c'est-à-dire si nous représentons en général par Su_n la somme des valeurs de la fonction u jusques à la valeur u_n, y compris cette valeur, nous aurons la relation

$$Su_n = \Sigma u_n + u_n + const.$$

On voit qu'il est nécessaire de distinguer l'*intégrale* désignée par le signe Σ de la *somme* désignée par le signe S. Ces quantités diffèrent en ce que la dernière exprime la somme des termes de la suite u_0, u_1, u_2, etc., jusques et compris le terme u_n, tandis que ce dernier terme n'est pas compris dans l'intégrale. On peut d'ailleurs supprimer l'indice n, et écrire simplement

$$Su = \Sigma u + u + const.$$

La constante se détermine d'après la connaissance du terme par lequel doit commencer la série des fonctions désignées par u, dont Su représente la somme.

542. Soit demandée, par exemple, la somme des puissances des nombres entiers. On fera dans les formules du n° 535, $\Delta x=1$, et l'on aura, en déterminant la constante de manière que les séries commencent par l'unité, cas dans lequel sa valeur est nulle,

$$Sx = 1+2+3+4+\ldots\ldots+x = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$$

$$Sx^2 = 1+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots+x^2 = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$$

$$Sx^3 = 1+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+x^3 = \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2$$

$$Sx^4 = 1+2^4+3^4+4^4+\ldots\ldots+x^4 = \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x$$

$$Sx^5 = 1+2^5+3^5+4^5+\ldots\ldots+x^5 = \frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{12}x^4-\frac{1}{12}x^2$$

$$Sx^6 = 1+2^6+3^6+4^6+\ldots\ldots+x^6 = \frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{42}x$$

etc.

543. La formule du n° 536 donne

$$S\left\{(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots(a+x+m\Delta x)\right\} =$$

$$\frac{1}{(m+1)\Delta x}(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots[a+x+(m+1)\Delta x]+const.,$$

expression d'où l'on déduit la somme des suites des nombres figurés. Le terme général de ces suites est

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m},$$

et l'on a, en faisant dans la formule précédente $a=0$ et $\Delta x=1$,

$$S\frac{(x+1)(x+2))x+3)..(x+m)}{1.2.3......m}=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)..(x+m+1)}{1.2.3.......(m+1)}+const.$$

Ainsi un terme quelconque de chaque suite donne la somme des termes de la suite précédente. On trouve en faisant successivement $m=1,=2,=3$, etc.

$$S\frac{x+1}{1}=1+2+3+4+............+\frac{x+1}{1}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}$$

$$S\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}=1+3+6+10+........+\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}$$

$$S\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}=1+4+10+20+...+\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.2.3.4}$$

etc.

La constante est nulle lorsque les suites doivent commencer par l'unité.

544. La formule du n° 537 donne de la même manière

$$S\frac{1}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x).....(a+x+m\Delta x)}=$$
$$-\frac{1}{m\Delta x}\cdot\frac{1}{(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x).....(a+x+m\Delta x)}+const.,$$

et cette formule servira à sommer les suites dont les termes ont l'unité pour numérateur, et pour dénominateurs les nombres figurés. Le terme général de ces suites est

$$\frac{1.2.3..........m}{(x+1)(x+2)(x+3)...(x+m)};$$

et la formule précédente donne

$$S\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots.m}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots.(x+m)}$$
$$=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1.2.3\ldots\ldots.m}{(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)}+const.$$

Cette formule est en défaut lorsque $m=1$. En supposant $m=2,=3,=4$, etc., et déterminant la constante de manière que les séries commencent par l'unité, elle donne

$$S\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}=\frac{2}{1}-\frac{1.2}{(x+2)}$$

$$S\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{3}{2}-\frac{1.2.3}{(x+2)(x+3)}$$

$$S\frac{1.2.3.4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2.3.4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{4}{3}-\frac{1.2.3.4}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

etc......

Les valeurs $\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3}$, etc., de la constante donnent les valeurs des séries correspondantes quand on les suppose prolongées à l'infini.

545. Quant aux fonctions transcendantes, on déduit de l'expression de Σa^x du n° 538,

$$Sa^x=\frac{a^{x+\Delta x}}{a^{\Delta x}-1}+const.$$

546. Les expressions de $\Sigma\sin.x$ et $\Sigma\cos.x$ du nº 539 donnent

$$S\sin.x = -\frac{\cos.\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x} + const.,$$

$$S\cos.x = \frac{\sin.\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x} + const.$$

Ces formules donnent la somme d'une suite de termes formés de sinus ou cosinus d'arcs croissants en progression par différence. On en déduit en effet, en écrivant $p+qx$ à la place de x, et $q\Delta x$ à la place de Δx,

$$S\sin.(p+qx) = -\frac{\cos.\left(p+qx+\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x} + \frac{\cos.\left(p-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x},$$

$$S\cos.(p+qx) = \frac{\sin.\left(p+qx+\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x} - \frac{\sin.\left(p-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x},$$

la constante étant déterminée de manière que les séries commencent respectivement par les termes $\sin.p$ et $\cos.p$.

Intégration des équations aux différences finies, linéaires et à coefficients constants.

547. Considérons, comme dans les articles précédents, une variable indépendante x, et une fonction y de cette variable. La variation de x est la constante Δx, qui est toujours connue. Une équation aux différences

finies exprimé en général une relation entre la variable x, la fonction y, et un certain nombre des différences Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc. de cette fonction.

On voit d'ailleurs sur-le-champ qu'en mettant à la place de Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc., les expressions générales du n° 523, la relation dont il s'agit se trouvera donnée entre x, y_0, y_1, y_2, y_3, etc., l'indice du terme le plus éloigné dans la série des valeurs de y étant égal à l'ordre le plus élevé des différences contenues dans l'équation proposée. D'où l'on voit qu'une équation aux différences finies n'est autre chose qu'une relation entre un certain nombre de termes consécutifs d'une série, par le moyen de laquelle on peut déterminer tous les termes de cette série, après en avoir pris arbitrairement un nombre égal à l'ordre de l'équation.

Intégrer une équation aux différences finies, c'est trouver l'expression du terme général de la série dont on vient de parler. Il résulte de ce qui précède que cette expression doit nécessairement contenir un nombre de constantes arbitraires égal à l'ordre le plus élevé des différences qui se trouvent dans l'équation, ou à l'indice le plus élevé des valeurs successives de la fonction y qui y sont contenues.

548. Le cas le plus simple est celui où l'équation proposée se réduit à

$$\Delta^n y = 0,$$

laquelle, d'après la formule citée du n° 523, revient à

$$y_n - n.y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} y_{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} y_{n-1} - \ldots \pm y_0 = 0,$$

et d'où l'on tire

$$y_n = n.y_{n-1} - \frac{n(n-1)}{2} y_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} y_{n-3} - \ldots \mp y_0.$$

Le terme de la série affecté de l'indice n est donné ici par la somme de n termes précédents, multipliés chacun par des coefficients numériques dépendants de cet indice.

L'intégration de l'équation $\Delta^n y=0$ s'effectuera d'ailleurs d'après ce qu'on a vu dans le n° 535. On aura

$$\Delta^{n-1} y = \Sigma^1 0 = A^1$$

$$\Delta^{n-2} y = \Sigma^2 0 = \frac{A_1 x}{\Delta x} + A_1$$

$$\Delta^{n-3} y = \Sigma^3 0 = \frac{A_1 x^2}{2(\Delta x)^2} - \frac{(A_1 - 2A_2)x}{2\Delta x} + A_3 ,$$

A_1, A_2, A_3, etc., étant des constantes arbitraires; et en général l'intégrale de l'ordre n sera

$$y = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} ,$$

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ étant des coefficients constants arbitraires, dont le nombre est égal à l'ordre de l'équation,

549. Considérons maintenant l'équation

$$y_{x+n} + Py_{x+n-1} + Qy_{x+n-2} + Ry_{x+n-3} + \ldots + Uy_x = 0 , \ldots (m)$$

dans laquelle P,Q,R,.....U désignent des nombres constants. Si nous posons $y=\rho^x$, ρ désignant une constante, tous les termes, après la substitution de cette valeur, seront divisibles par ρ^x, et il restera

$$\rho^n + P\rho^{n-1} + Q\rho^{n-2} + R\rho^{n-3} + \ldots\ldots + U = 0 , \qquad (n)$$

en sorte que l'expression $y=\rho^x$ satisfera à l'équation proposée (m), pourvu que ρ soit l'une quelconque des racines de l'équation (n).

En représentant donc par $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots\ldots \rho_n$ les n racines de l'équation (n), que nous supposons d'abord toutes réelles et inégales, nous aurons pour y les n valeurs particulières $y=\rho_1^x, y=\rho_2^x, y=\rho_3^x, \ldots\ldots y=\rho_n^x$; et puisque l'équation (n) serait également satisfaite par la somme de deux, ou d'un nombre quelconque de ces valeurs, affectées chacune de coefficients constants quelconques, l'on aura

$$y = A_1 \rho_1^x + A_2 \rho_2^x + A_3 \rho_3^x + \ldots\ldots + A_n \rho_n^x$$

pour l'expression de l'intégrale générale de cette équation; $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ étant les n constantes arbitraires qui doivent entrer dans cette intégrale.

550. Dans le cas où l'équation (n) a des racines imaginaires, soit

$$\rho^2 - 2k\rho \cos.\varphi + k^2 \quad \text{et} \quad \rho = k(\cos.\varphi \pm \sqrt{-1} \sin.\varphi)$$

un des facteurs réels du second degré de son premier membre, et les deux racines imaginaires correspondantes. On reconnaîtra, par le n° 117, que l'équation (m) est satisfaite par les deux valeurs particulières

$$y = k^x(\cos.\varphi x + \sqrt{-1} \sin.\varphi x) \quad \text{et} \quad y = k^x(\cos.\varphi x - \sqrt{-1} \sin.\varphi x),$$

et, par conséquent, par la somme de ces valeurs, multipliées chacune par un coefficient constant quelconque. D'où l'on conclut que la partie de l'expression générale de la fonction y correspondante aux deux racines imaginaires dont il s'agit est, sous forme réelle,

$$B_1 k^x \cos.\varphi x + B_2 k^x \sin.\varphi x,$$

B_1 et B_2 étant des constantes arbitraires.

551. Le cas où l'équation (n) a des racines égales se résout d'une manière semblable à ce qu'on a vu dans le n° 440. Si l'on représentait par ρ_1 et $\rho_1+\omega$ deux des racines de cette équation, la somme des valeurs particulières correspondantes serait

$$A_1\rho_1^x + A_2(\rho_1+\omega)^x;$$

ou, en développant la puissance indiquée,

$$(A_1+A_2)\rho_1^x + A_2\omega.x\rho_1^{x-1} + A_2\omega^2\frac{x(x-1)}{2}\rho_1^{x-2} + \text{etc.}$$

Or, on peut donner à A_1 et A_2 des valeurs telles que les quantités A_1+A_2 et $A_2\omega$ se réduisent à des constantes finies quelconques lorsque l'on supposera ω infiniment petite; ce qui réduit l'expression précédente à

$$B_1\rho^x + B_2x\rho_1^{x-1}.$$

Dans le cas de trois racines égales, la somme des trois valeurs particulières correspondantes sera

$$A_1\rho_1^x + A_2x\rho_1^{x-1} + A_3(\rho_1+\omega)^x,$$

ou

$$(A_1+A_3)\rho_1^x + (A_2+A_3\omega)x\rho_1^{x-1} + A_3\omega^2\frac{x(x-1)}{2}\rho^{x-2} + \text{etc.}$$

Et comme l'on peut attribuer aux constantes A_1, A_2, A_3 des valeurs telles que les quantités $A_1+A_3, A_2+A_3\omega, A_3\omega^2$ deviennent des constantes finies quelconques lorsque ω deviendra infiniment petite, la somme des trois valeurs particulières dont il s'agit prend la forme

$$B_1\rho_1^x + B_2x\rho_1^{x-1} + B_3\frac{x(x-1)}{2}\rho_1^{x-2}.$$

Et ainsi de suite dans le cas où il y aurait un plus grand nombre de racines égales entre elles.

552. Les constantes arbitraires introduites dans l'intégrale générale, se détermineront toujours d'après la condition que cette intégrale reproduise n valeurs données de la fonction y, correspondantes à n valeurs également données de la variable x.

XLI. Formules d'interpolation.

553. L'opération désignée sous le nom d'*interpolation* est une des applications principales du calcul des différences finies. Elle est fondée sur cette notion, qu'à défaut de l'expression analytique d'une fonction qui en fait connaître complétement la nature, et qui permet d'en calculer exactement, ou d'une manière aussi approchée qu'on le veut, la valeur correspondante à une valeur quelconque de la variable, on peut connaître, avec un degré d'exactitude qui suffit aux applications, toutes les valeurs de la fonction dont il s'agit lorsqu'on connaît un nombre limité de valeurs données de cette fonction. C'est ainsi que dans les constructions graphiques, on regarde la figure d'une courbe comme étant déterminée par un certain nombre de points donnés appartenant à cette courbe.

Reprenons la forme du n° 521

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots\ldots + \Delta^n u_0.$$

Cette formule établit simplement une relation entre la valeur u_n, la valeur u_0, et les différences $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots\ldots$ $\Delta^n u_0$; ou, ce qui revient au même, entre les valeurs

$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots . u_n$ qui sont censées connues. On ne peut, à parler rigoureusement, en tirer rien qui ne soit déjà donné.

Considérons u comme une fonction de la variable x seule, et admettons que cette variable croisse par la différence constante Δx. Si nous écrivons u_x pour représenter la valeur que reçoit la fonction u quand on donne à la variable une valeur désignée par x, nous devrons, en remplaçant dans la formule précédente u_n par u_x, remplacer n par $\frac{x}{\Delta x}$. Elle s'écrira

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x} \Delta u_0 + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$
$$+ \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots + \Delta^{\frac{x}{\Delta x}} u_0.$$

554. Si la fonction u était une fonction rationnelle et entière de x de l'ordre r, la différence $\Delta^r u_0$ serait constante, et par conséquent les différences des ordres suivants seraient nulles, comme on l'a vu n° 527. L'expression précédente aurait donc un nombre déterminé de termes ; en sorte que la connaissance des $r+1$ premières valeurs de u suffirait pour continuer indéfiniment la série, et donner des nombres exacts. Cela se voit aussi en remarquant que si l'on fait $\Delta^n u=0$ dans l'équation du n° 523, on en tire

$$u_n = n . u_{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3} - \ldots . \mp u_0,$$

formule qui donne un terme quelconque de la suite u_0, u_1, u_2, etc., au moyen des n termes précédents. Cette circonstance n'a pas lieu en général ; mais si les diffé-

rences successives $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0$, etc., ont des valeurs décroissantes, comme cela arrive dans les cas auxquels s'appliquent les méthodes dont il s'agit, on pourra supprimer les termes qui seront assez petits pour ne pas influer sur la valeur des résultats, eu égard au degré d'exactitude avec lequel les nombres sont calculés. La formule précédente pourra servir alors à prolonger la série; mais on conçoit qu'à mesure que l'on s'éloignera davantage des nombres donnés, on sera exposé à commettre des erreurs de plus en plus grandes.

Il importe de remarquer d'ailleurs que dans les cas où les différences d'un certain ordre r sont constantes, ou peuvent être supposées constantes, le calcul des termes de la suite u_0, u_1, u_2, etc., qui dépassent le terme u_r, n'exige plus que de simples additions. Soit par exemple la fonction

$$u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1,$$

et supposons $x=1$. On calculera les quatre premiers termes, correspondants aux valeurs $x=0, x=1, x=2, x=3$, et l'on formera le tableau suivant

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
0	−1			
1	+1	+2		
2	−1	−2	−4	
3	−1	0	+2	+6

La nature de la fonction proposée, indiquant que les différences troisièmes sont constantes, on voit que l'on

pourrait continuer la série des valeurs de u_x par la formule

$$u_x = u_0 + x\Delta u_0 + x(x-1)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + x(x-1)(x-2)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3},$$

dans laquelle on ferait $u_0 = -1, \Delta u_0 = 2, \Delta^2 u_0 = -4, \Delta^3 u_0 = 6$. Mais il est beaucoup plus simple de prolonger le tableau en écrivant la différence constante 6 dans la dernière colonne à droite, et formant par addition les colonnes en revenant de droite à gauche.

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
3	-1	0	2	6
4	$+7$	8	8	6
5	29	22	14	6
6	71	42	20	6
etc.				

Les résultats que l'on obtient ici sont entièrement exacts. Mais il n'en serait pas de même si les différences du dernier ordre, que l'on considère, n'étaient pas rigoureusement constantes. Il faudrait alors calculer d'avance quelques termes éloignés de la série, et s'assurer que ces termes sont reproduits par le mode de calcul qui vient d'être indiqué.

555. L'objet de l'interpolation consiste d'ailleurs non pas à prolonger indéfiniment une série de termes dont un certain nombre sont donnés, mais à calculer les termes intermédiaires dans une série dont un certain nombre de termes sont déterminés de distance en dis-

tance. Quoique la formule du n° 553 n'exprime, à proprement parler, que des relations entre les valeurs de u qui répondent aux valeurs déterminées $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc., de la variable x, on la regarde comme exprimant en fonction de x les valeurs de u, qui répondent à des valeurs quelconques de cette variable comprises entre les précédentes. Si l'on attribue à x une valeur moindre que Δx, l'expression de u_x sera dans la plupart des cas très-convergente, et donnera facilement une valeur fort approchée de cette quantité.

D'après ces notions, le calcul des tables, telles que les tables de logarithmes ou les tables astronomiques, peut être réduit à calculer exactement en premier lieu, au moyen de l'expression analytique des fonctions, un petit nombre de termes à intervalles éloignés ; et en second lieu, à former les termes intermédiaires par de simples additions. Nous avons supposé ci-dessus l'accroissement Δx constant. Admettons qu'entre deux quelconques des termes connus u_0, u_1, u_2, u_3, etc., qui répondent aux valeurs $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc., de la variable x, on veuille *interpoler* un nombre $m-1$ de termes distribués à intervalles égaux. Soit $\delta x = \frac{\Delta x}{m}$ le nouvel incrément de x. Il est évident, d'après ce que l'on a vu dans le n° précédent, que l'on formera facilement les termes intermédiaires demandés, si l'on connaît $u_0, \delta u_0, \delta^2 u_0, \delta^3 u_0$, etc., et si l'on peut supposer constantes les différences d'un certain ordre marquées par $\delta^i u_0$; puisque l'on aura alors la dernière colonne d'un tableau semblable à celui qui a été donné pour exemple, et les premiers termes de toutes les autres colonnes. Or, si l'on regarde, d'après

ce qui a été dit ci-dessus, la formule du n° 553, comme devant donner les valeurs de u correspondantes aux valeurs intermédiaires de x, cette formule donnera d'abord, en écrivant $m\delta x$ au lieu de Δx,

$$u_x = u_0 + \frac{x}{m\delta x}\Delta u_0 + \frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$
$$+\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3}+\text{etc.},$$

expression dans laquelle $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0$, etc., doivent être regardées comme des quantités constantes, et connues par le calcul préliminaire qui a été fait des termes de la suite qui répondent aux valeurs $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc. En différentiant ensuite par rapport au signe δ, et remarquant que les produits

$$\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\ldots$$

formant une fonction rationnelle et entière de x, leurs différences des ordres inférieurs à l'ordre marqué par le nombre des facteurs sont nulles, on trouvera

$$\delta^r u_x =$$
$$\left[\begin{array}{l}\delta^r\left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-(r-1)\right)\right\}.\frac{\Delta^r u_0}{1.2.3\ldots r}\\ +\delta^r\left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-r\right)\right\}.\frac{\Delta^{r+1} u_0}{1.2.3\ldots(r+1)}\\ +\delta^r\left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-(r+1)\right)\right\}.\frac{\Delta^{r+2} u_0}{1.2.3\ldots(r+2)}\\ +\text{etc.}\end{array}\right]$$

Cette expression donnera les différences cherchées $\delta u_0, \delta^2 u_0, \delta^3 u_0$, en y faisant $x=0$ après que les différen-

tiations indiquées auront été effectuées. Les formules dont il s'agit pouvant être employées utilement dans les applications, nous donnerons les expressions des différences des premiers ordres.

En développant les produits indiqués, on trouve facilement en premier lieu

$$\delta u_x = \left[\begin{array}{l} \delta \dfrac{x}{m\delta x} \Delta u_0 \\ + \delta\left(\dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2} - \dfrac{x}{m\delta x}\right) \dfrac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\ + \delta\left(\dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} - 3\dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2} + 2\dfrac{x}{m\delta x}\right) \dfrac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ + \delta\left(\dfrac{x^4}{m^4(\delta x)^4} - 6\dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} + 11\dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2} - 6\dfrac{x}{m\delta x}\right) \dfrac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \end{array}\right]$$

$$\delta^2 u_x = \left[\begin{array}{l} \delta^2 \dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2} \dfrac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\ + \delta^2\left(\dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} - 3\dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2}\right) \dfrac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ + \delta^2\left(\dfrac{x^4}{m^4(\delta x)^4} - 6\dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} + 11\dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2}\right) \dfrac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \end{array}\right]$$

$$\delta^3 u_x = \left[\begin{array}{l} \delta^3 \dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} \dfrac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ + \delta^3\left(\dfrac{x^4}{m^4(\delta x)^4} - 6\dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3}\right) \dfrac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \end{array}\right]$$

$$\delta^4 u_x = \delta^4 \frac{x^4}{m^4(\delta x)^4} \frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4}$$

etc.....

En employant ensuite l'expression de $\Delta^n x^k$ du nº 527, dans laquelle il faudra faire $x=0$, ce qui la réduit à son dernier terme, ces formules deviennent

$$\delta u_0 = \frac{1}{m}\left[\Delta u_0 + \frac{1-m}{2.m}\Delta^2 u_0 + \frac{1-3m+2m^2}{2.3.m^2}\Delta^3 u_0 + \frac{1-6m+11m^2-6m^3}{2.3.4.m^3}\Delta^4 u_0 + \text{etc.}\right]$$

$$\delta^2 u_0 = \frac{1}{m^2}\left[\Delta^2 u_0 + \frac{1-m}{m}\Delta^3 u_0 + \frac{7-18m+11m^2}{3\ 4.m^2}\Delta^4 u_0 + \text{etc.}\right]$$

$$\delta^3 u_0 = \frac{1}{m^3}\left[\Delta^3 u_0 + \frac{3-3m}{2.m}\Delta^4 u_0 + \text{etc.}\right]$$

$$\delta^4 u_0 \quad \frac{1}{m^4}\left[\Delta^4 u_0 + \text{etc.}\right]$$

etc.....

Il est rare que l'on soit dans le cas d'employer des différences d'un ordre plus élevé que le quatrième. On voit d'ailleurs que si l'on s'arrête aux différences de l'ordre r des nombres u_0, u_1, u_2, etc. , de la série proposée, c'est-à-dire si l'on regarde la différence $\Delta^r u_0$ comme étant constante, il en résulte la conséquence que la différence du même ordre $\delta^r u_x$ des nombres qu'il s'agit d'interpoler entre les précédents est également constante et égale à $\frac{\Delta^r u_x}{m^r}$, $m-1$ étant le nombre des termes insérés entre deux termes consécutifs de la suite proposée. Les résultats précédents donneront toujours les moyens d'interpoler une suite de nombres placés à intervalles égaux entre les termes d'une suite donnée qui sont également placés à intervalles égaux.

556. Pour donner un exemple de l'usage de ces procédés, on déterminera les valeurs de la fonction

$$u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

considérée n° 554, qui répondent aux valeurs de x, croissant par dixièmes de l'unité. Nous avons donc ici

$$u_0 = -1$$
$$\Delta u_0 = 2$$
$$\Delta^2 u_0 = -4$$
$$\Delta^3 u_0 = 6$$

et les différences des ordres supérieurs sont nulles. Mettant ces valeurs dans les formules précédentes, où l'on fera $m=10$, il viendra

$$\delta u_0 = \frac{1}{10}\left[\ 2 + \frac{-9}{20}(-4) + \frac{1-30+200}{600}\,6\right] = 0,551$$

$$\delta^2 u_0 = \frac{1}{100}\left[-4 + \frac{-9}{10}\,6\right] = -0,094$$

$$\delta^3 u_0 = \frac{1}{1000}\,6 = 0,006.$$

Ainsi, le calcul des valeurs intermédiaires demandées, s'opérera de la manière suivante :

x	u_x	δu_x	$\delta^2 u_x$	$\delta^3 u_x$
0	—1,000			
0,1	—0,449	0,551		
0,2	+0,008	0,457	—0,094	
0,3	0,377	0,369	—0,088	0,006
0,4	0,664	0,287	—0,082	6
0,5	0,875	0,211	—0,076	6
0,6	1,016	0,141	—0,070	6
0,7	1,093	0,077	—0,064	6
0,8	1,112	0,019	—0,058	6
0,9	1,079	—0,033	—0,052	6
1,0	1,000	—0,079	—0,046	6
1,1	0,881	—0,119	—0,040	6
etc.				

On peut voir, dans le *Précis* qui est au devant des

Tables de Logarithmes de Callet, page 64, les précautions qu'exigent les calculs de ce genre et la manière de corriger les petites erreurs auxquelles ils peuvent donner lieu lorsque les valeurs des différences ne sont qu'approchées.

557. L'usage des tables de logarithmes ou des autres tables du même genre, donne lieu à une application continuelle du procédé de l'interpolation. L'emploi des *parties proportionnelles* se déduit immédiatement du procédé qui vient d'être exposé en supposant les différences du second ordre nulles, et réduisant l'expression de u_x, écrite n° 554, à

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x} \Delta u_0.$$

Si les différences du second ordre ne sont pas nulles, on aura donc un résultat plus exact en employant les trois premiers termes

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x} \Delta u_0 + \frac{x(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \frac{\Delta^2 u_0}{2}.$$

Cet usage des tables donne lieu aussi à la question inverse du problème de l'interpolation, c'est-à-dire à la recherche de la valeur de x, qui répond à la valeur donnée u_x de la fonction u. Quand on peut supposer nulles les différences des ordres supérieurs, la première des équations précédentes donne

$$x = \Delta x \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0}.$$

Si cette formule ne présentait pas l'exactitude nécessaire, il faudrait écrire

$$x = \Delta x \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right) \frac{\Delta^2 u_0}{1.2 \Delta u_0} + \text{etc.}}$$

Après avoir calculé une première valeur approchée de x, au moyen de l'expression $\Delta x \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0}$, on la substituerait dans le second membre pour obtenir un résultat plus exact. Cette seconde valeur de x pourrait être substituée de nouveau pour obtenir un résultat plus exact encore.

558. Nous avons supposé, dans le n° 554 et les suivants, que la variable x croissait par différences constantes, ou que les nombres de la suite proposée étaient distribués à intervalles égaux. On peut encore, dans les cas où cette condition n'aurait pas lieu, établir une formule d'interpolation analogue à l'expression de u_x du n° 554. Remarquons qu'en mettant dans cette expression pour $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0$, etc., les valeurs écrites n° 523, elle devient

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}(u_1 - u_0) + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{1.2}$$
$$+ \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)\frac{u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0}{1.2.3} + \text{etc.};$$

ou bien

$$u_x =$$

$$\left[\begin{array}{l} u_0\left\{1-\frac{x}{\Delta x}+\frac{1}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)-\frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)+\text{etc.}\right\} \\ +u_1\left\{\frac{x}{\Delta x}-\frac{1}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)+\frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)-\text{etc.}\right\} \\ +u_2\left\{\frac{1}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)-\frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)+\text{etc.}\right\} \\ +u_3\left\{\frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)-\text{etc.}\right\} \\ +\text{etc.} \end{array}\right]$$

En faisant $x=0$, cette équation se réduit à $u_x=u_0$; en faisant $x=\Delta x$, elle se réduit à $u_x=u_1$; en faisant $x=2\Delta x$, elle se réduit à $u_x=u_2$; en faisant $x=3\Delta x$, elle se réduit à $u_x=u_3$; et ainsi de suite. La nature de l'expression consiste donc en ce qu'elle est formée des termes successifs $u_0.u_1,u_2,u_3$, etc., ayant pour coefficients des fonctions rationnelles et entières de la variable x, qui ont la propriété de se réduire à l'unité quand on donne à x la valeur correspondante au terme auquel appartient la fonction, et de se réduire à zéro quand on donne à x une valeur correspondante à tout autre terme.

Représentons en général par x_0,x_1,x_2,x_3, etc., les valeurs de x qui, substituées dans la *fonction* u, donnent respectivement u_0,u_1,u_2,u_3, etc. De quelque manière que croissent ces valeurs de x, on formera évidemment une expression qui présentera la même propriété que la précédente, si l'on écrit :

$$u_x = \left[\begin{array}{l} u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ + u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ + u_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ + u_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ + \text{etc.}\ldots.. \end{array} \right]$$

Cette formule peut servir à calculer facilement, au moyen d'un certain nombre de valeurs données de la fonction u correspondante à des valeurs déterminées de x, une valeur quelconque intermédiaire entre celles-ci. On vérifie, d'ailleurs, qu'en supposant les valeurs x_0, x_1, x_2, x_3, etc., croissant en progression arithmétique, cette dernière formule revient à la précédente.

559. Un des principaux usages des méthodes d'interpolation consiste à établir des formules qui, étant déduites d'un certain nombre de résultats d'observation ou d'expérience, sont regardées comme exprimant, d'une manière approchée, la loi d'un phénomène. On doit remarquer que l'usage des formules de ce genre ne doit pas en général être étendu au delà des limites des résultats qui ont été obtenus. Si l'on regarde les nombres donnés par l'observation comme étant tout à fait exacts, et si les formules cherchées doivent y satisfaire, on peut employer les procédés qui viennent d'être exposés. On peut aussi tâcher de satisfaire à ces nombres par d'autres expressions plus appropriées à la nature du phénomène. Mais le plus souvent les résultats numériques sont affectés d'erreurs, et il ne conviendrait

pas de s'attacher à construire des formules qui s'accordassent exactement avec tous. On cherche alors à remplacer d'abord ces résultats par une suite régulière, ce qui peut se faire soit au moyen d'une construction graphique, soit en altérant les nombres de manière à rendre progressive la marche de leurs différences de divers ordres. Une semblable altération est toujours plus ou moins arbitraire, et devrait être dirigée d'après des principes qui dépendent de la théorie des probabilités.

Approximation des quadratures.

560. Les calculs numériques qu'il est nécessaire d'effectuer pour les rectifications, les quadratures, les cubatures, la détermination des centres de gravité, celle des centres d'inertie, etc., peuvent toujours être réduits à évaluer des intégrales définies telles que

$$\int_a^b dx.u$$

u désignant une fonction de x et a, b, les limites de l'intégrale. Lorsque cette évaluation ne peut être effectuée directement, on emploie divers procédés d'approximation dont les plus remarquables consistent à déduire la valeur de l'intégrale de la seule connaissance d'un certain nombre de valeurs de la fonction u.

Supposons toujours que la variable x varie par la différence constante Δx, et reprenons l'expression de u, du n° 554,

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{x}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \text{etc.}$$

D'après la notion sur laquelle sont fondés les procédés de l'interpolation, nous regardons cette formule comme pouvant représenter les valeurs de la fonction u, non-seulement quand on y donne à x les valeurs $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc., mais pour une valeur quelconque de cette variable. En multipliant donc par dx, et intégrant entre les limites a et b, nous obtiendrons la valeur de l'intégrale proposée.

L'expression précédente revient à

$$
\begin{aligned}
u_x = u_0 &+ \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - \frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + 2\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 + 11\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 6\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^5 - 10\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 + 35\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 - 50\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 \right. \\
&\qquad \left. + 24\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^5 u_0}{1.2.3.4.5} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^6 - 15\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^5 + 85\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 - 225\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 \right. \\
&\qquad \left. + 274\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 120\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^6 u_0}{1.2.3.4.5.6} \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Multipliant par dx, et intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=\Delta x$, il viendra

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\Delta x} dx.u = \Delta x\Big[u_0 &+ \frac{1}{2}\Delta u_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 u_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 u_0 - \frac{19}{720}\Delta^4 u_0 \\
&+ \frac{3}{160}\Delta^5 u_0 - \frac{863}{60480}\Delta^6 u_0 + \text{etc.}\Big].
\end{aligned}
$$

pour l'expression de la valeur de la première partie de l'intégrale proposée comprise entre les limites 0 et Δx. La même formule donnera les expressions des parties suivantes de cette intégrale en écrivant u_1, u_2, u_3, etc., à la place de u. D'où l'on conclut évidemment

$$\int_0^{n\Delta x} dx.u = \Delta x \left[\begin{array}{l} u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} \\ + \frac{1}{2}(\Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta u_{n-1}) \\ - \frac{1}{12}(\Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \Delta^2 u_{n-1}) \\ + \frac{1}{24}(\Delta^3 u_0 + \Delta^3 u_1 + \Delta^3 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \Delta^3 u_{n-1}) \\ - \text{etc.} \end{array}\right];$$

et en remarquant que

$$\begin{array}{l} \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots\ldots + \Delta u_{n-1} = u_n - u_0, \\ \Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 + \ldots\ldots + \Delta^2 u_{n-1} = \Delta u_n - \Delta u_0, \\ \Delta^3 u_0 + \Delta^3 u_1 + \Delta^3 u_2 + \ldots\ldots + \Delta^3 u_{n-1} = \Delta^2 u_n - \Delta^2 u_0, \\ \text{etc.}, \end{array}$$

on changera l'expression précédente en

$$\int_0^{n\Delta x} dx.u =$$

$$\Delta x \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} + \frac{1}{2} u_n \\ - \frac{1}{12}(\Delta u_n - \Delta u_0) + \frac{1}{24}(\Delta^2 u_n - \Delta^2 u_0) - \frac{19}{720}(\Delta^3 u_n - \Delta^3 u_0) \\ + \frac{3}{160}(\Delta^4 u_n - \Delta^4 u_0) - \frac{863}{60480}(\Delta^5 u_n - \Delta^5 u_0) + \text{etc} \end{array}\right]$$

Au moyen de cette formule on peut calculer la valeur de l'intégrale $\int dx.u$, entre des limites données, en par-

tageant l'intervalle de ces limites en un nombre n de parties égales chacune à Δx, et déterminant les valeurs $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n$ de la fonction u, qui répondent aux points de division. Une première valeur approchée est donnée par le premier terme seul

$$\Delta x.\left(\frac{1}{2}u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots\ \ldots\ldots+u_{n-1}+\frac{1}{2}u_n\right).$$

Les termes suivants sont la correction de cette valeur. Le résultat sera d'autant plus exact, que le nombre n étant plus grand, les différences qui composent les termes de correction sont plus petites.

561. La formule précédente ne pourrait être utilement employée qu'autant que les différences des ordres successifs décroîtraient très-rapidement. On peut en obtenir une autre qui donnera une approximation plus prompte. Reprenons l'expression de u_x du n° précédent, et après avoir multiplié par dx, intégrons depuis $x=0$ jusqu'à $x2=\Delta x$. Il viendra

$$\int_0^{2\Delta x} dx.u=\Delta x\left[2u_0+2\Delta u_0+\frac{1}{3}\Delta^2 u_0-\frac{1}{90}\Delta^4 u_0\right.$$
$$\left.+\frac{1}{90}\Delta^5 u_0-\frac{37}{3780}\Delta^6 u_0+\text{ etc.}\right],$$

ou, en faisant attention que, $\Delta u_0=u_1-u_0$, $\Delta^2 u_0=u_2-2u_1+u_0$,

$$\int_0^{2\Delta x} dx.u=\Delta x\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3}u_0+\frac{4}{3}u_1+\frac{1}{3}u_2\\ -\frac{1}{90}\Delta^4 u_0+\frac{1}{90}\Delta^5 u_0-\frac{37}{3780}\Delta^6 u_0+\text{ etc.}\end{array}\right]$$

pour l'expression d'une première partie de l'intégrale comprise entre les limites 0 et $2\Delta x$. En ajoutant les ex-

pressions analogues pour les parties suivantes comprises entre $2\Delta x$ et $4\Delta x$, $4\Delta x$ et $6\Delta x$, etc., on aura donc, n étant un nombre pair,

$$\int_0^{n\Delta x} dx.u =$$

$$\frac{\Delta x}{3}\left[\begin{array}{l} \qquad u_0+4u_1+2u_2+4u_3+2u_4+4u_5+\ldots+2u_{n-2}+4u_{n-1}+u_n \\ -\frac{1}{30}(\Delta^4u_0+\Delta^4u_2+\Delta^4u_4+\ldots+\Delta^4u_{n-6}+\Delta^4u_{n-4}+\Delta^4u_{n-2}) \\ +\frac{1}{30}(\Delta^5u_0+\Delta^5u_2+\Delta^5u_4+\ldots+\Delta^5u_{n-6}+\Delta^5u_{n-4}+\Delta^5u_{n-2}) \\ -\frac{37}{1260}(\Delta^6u_0+\Delta^6u_2+\Delta^6u_4+\ldots+\Delta^6u_{n-6}+\Delta^6u_{n-4}+\Delta^6u_{n-2}) \\ +\text{etc.} \end{array}\right]$$

La première ligne est le résultat que l'on obtient en concevant dans l'intervalle compris entre 0 et $2\Delta x$, la courbe dont l'ordonnée est u, remplacée par un arc de parabole passant par les extrémités des trois ordonnées u_0, u_1, u_2; et de même pour les autres intervalles. Les termes suivants sont la correction de cette même première valeur, qui est déjà très-approchée.

On peut remarquer que l'usage des formules précédentes exige la connaissance des valeurs $u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}$, etc., de la fonction u, qui sont placées au delà des limites de l'intégrale définie. Si la fonction u est donnée dans toute son étendue, cette circonstance n'entraîne aucune difficulté. Mais il n'en serait pas de même si, comme cela arrive quelquefois, cette fonction n'était donnée que dans les limites de l'intégrale définie. Nous observerons à cet égard que l'esprit des méthodes d'interpolation consiste alors à regarder la fonction proposée comme entièrement définie par les valeurs particu-

lières $u_0 . u_1, u_2, \ldots, . . u_n$. La différence de l'ordre le plus élevé que l'on puisse calculer au moyen de ces valeurs, est $\Delta^n u_0$. On doit donc supposer cette différence constaute, et déterminer en conséquence les termes qui entrent dans les formules dont il s'agit.

XLII. Lignes de niveau et de plus grande pente sur une surface.

562. Nous concevons les points d'une surface rapportés à trois coordonnées rectangulaires x, y, z. Les abscisses x, y sont horizontales; l'ordonnée z est verticale. La figure de la surface est donnée par l'équation

$$z = f(x, y).$$

Admettons que les abscisses x, y reçoivent chacune des accroissements infiniment petits dx, dy; l'ordonnée z prendra également un accroissement infiniment petit, représenté par

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy,$$

$\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ étant respectivement les coefficients différentiels de la fonction $f(x, y)$, pris par rapport à x et à y. La valeur de dz dépend du rapport que l'on a établi entre les variations arbitraires dx et dy. Si ce rapport est tel que $dz = 0$, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}},$$

on passera d'un point à un autre de la surface sans que

l'ordonnée z change de valeur. L'équation précédente est donc l'équation différentielle de la projection sur le plan des xy de la *ligne de niveau*, passant par le point de la surface, dont les coordonnées sont représentées par x, y, z.

On obtient l'équation en termes finis de cette projection en attribuant à z, dans l'équation $z = f(x, y)$, une valeur constante égale à l'ordonnée du point par lequel on veut faire passer la ligne de niveau.

563. En passant du point de la surface, *dont les coordonnées sont* x, y, z, au point dont les coordonnées sont $x+dx, y+dy, z+dz$, on parcourt, dans le plan horizontal des xy, un espace $dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$; et on s'élève verticalement de l'espace dz. La *pente* de la ligne parcourue sur la surface, c'est-à-dire la différence de niveau de ses deux points extrêmes, divisée par sa projection horizontale, est donc exprimée par

$$\frac{\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy}{dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

La grandeur de cette pente variera avec le rapport arbitraire $\frac{dy}{dx}$. Si l'on veut connaître la direction de la plus grande pente, on égalera à zéro la différentielle de l'expression précédente, prise par rapport à $\frac{dy}{dx}$, ce qui donnera

$$\frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dy}}{\frac{dz}{dx}}$$

pour l'équation différentielle de la projection horizontale de la *ligne de plus grande pente*. On voit que, pour un point quelconque de la surface, les projections horizontales des lignes de niveau et de plus grande pente qui se croisent en ce point, et par conséquent ces lignes elles-mêmes, sont toujours perpendiculaires l'une sur l'autre, résultat dont il est aisé de s'assurer directement.

564. La considération des lignes de niveau et de plus grande pente s'applique à la représentation graphique de la surface de la terre, au tracé des routes et à la conduite des eaux. On reconnaît que cette surface présente des pentes alternatives en sens opposés, sur lesquelles se trouvent des systèmes de lignes de plus grande pente, séparés par des lignes de moindre pente, désignées par les noms de *faîtes* et de *thalwegs*, qui sont autant d'asymptotes des lignes de plus grande pente ordinaires. Quand on parcourt une même ligne de niveau, les points où elle est coupée par les lignes de faîtes ou de thalwegs sont toujours ceux où la pente est un mininum. Il existe des points remarquables où les lignes de faîtes et de thalwegs se croisent à angles droits, et dans lesquels la hauteur verticale de la surface est un maximum ou un minimum absolu ou relatif. Les derniers de ces points indiquent les lieux où l'on doit diriger le tracé des routes ou des canaux lorsqu'il s'agit de franchir une chaîne de montagnes.

XLIII. De la courbure des surfaces.

565. La courbure d'une courbe est définie quand on détermine le rayon du cercle osculateur, c'est-à-dire du

cercle qui a un contact du second ordre avec cette courbe. La courbure d'une surface est également définie en assignant le rayon du cercle osculateur de toutes les sections normales qui peuvent être faites en un point donné.

Si, suivant la normale en un point quelconque *m* d'une surface, on fait passer un plan, on obtiendra une courbe qui sera une *section normale* de la surface. Prenons sur la normale, à partir du point *m*, une distance infiniment petite δ; puis, par le point ainsi déterminé, menons un plan perpendiculaire à *la* normale; nous obtiendrons une courbe que nous désignerons, avec M. Ch. Dupin, par le nom d'*indicatrice*, parce que la nature de cette courbe fait connaître, comme on le verra tout à l'heure, la figure de la surface près du point *m*. Si d'ailleurs nous représentons par σ l'arc infiniment petit compris entre le point *m* et le point où la section normale rencontre l'indicatrice, et si nous appelons ρ le rayon de courbure de cette section normale, nous aurons

$$\sigma = \rho \,.\, \text{arc.cos.}\left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right) = \rho \sqrt{\frac{2\delta}{\rho}},$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\delta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Ainsi les rayons de courbure de diverses sections normales sont proportionnels aux quarrés des arcs σ de ces sections, comptés du point *m* jusqu'à la rencontre de l'indicatrice, ou, si l'on veut, aux quarrés des demi-diamètres de l'indicatrice, qui ne diffèrent des arcs qui leur correspondent, que d'une quantité infiniment petite du second ordre.

566. Cela posé, la situation du point m étant rapportée à trois axes rectangulaires par les coordonnées x, y, z, soit

$$z=f(x,y),$$

l'équation de la surface proposée. Représentons par $x+\alpha, y+\beta, z+\gamma$ les coordonnées du point de rencontre de la section normale et de l'indicatrice; en sorte que les quantités α et β étant très-petites, on pourra négliger leurs puissances et leurs produits par rapport aux puissances et aux produits d'un ordre inférieur. On aura, d'après la formule du n° 138,

$$\gamma=\frac{dz}{dx}\alpha+\frac{dz}{dy}\beta+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\alpha^2+2\frac{d^2z}{dxdy}\alpha\beta+\frac{d^2z}{dy^2}\beta^2\right);$$

expression que nous écrirons plus simplement

$$\gamma=p\alpha+q\beta+\frac{1}{2}(r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2), \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

en représentant pour abréger par p et q les coefficients différentiels du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$; et par r,s,t les coefficients différentiels du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$.
On peut regarder α,β,γ comme des coordonnées comptées à partir du point m sur des axes parallèles aux axes des x, des y et des z. L'équation (b), dans une étendue très-petite autour de ce point, doit être regardée comme appartenant à la surface proposée.

De plus, l'équation du plan tangent mené par le point m à cette surface sera, d'après le n° 217,

$$\gamma=p\alpha+q\beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

On en conclut que le plan de l'indicatrice, mené parallèlement au plan tangent à la distance δ, mesurée suivant la normale, ou à la distance $\delta\sqrt{p^2+q^2+1}$, mesurée suivant l'axe des z, aura pour équation

$$\gamma-\delta\sqrt{p^2+q^2+1}=p\alpha+q\beta \quad \text{.............. } (d)$$

Enfin, si l'on élimine γ entre les équations (b) et (d), le résultat de cette élimination, qui est

$$2\delta\sqrt{p^2+q^2+1}=r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2, \quad \text{............. } (e)$$

sera évidemment l'équation de la projection de l'indicatrice sur le plan de $\alpha\beta$. On voit que la distance δ est infiniment petite du second ordre lorsque α et β sont infiniment petites du premier ordre.

567. Nous avons d'ailleurs

$$\sigma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2, \quad \text{...................... } (f)$$

ou, en mettant pour γ sa valeur donnée par l'équation (b), et ne conservant que les quantités du second ordre par rapport à α et β,

$$\sigma^2=(1+p^2)\alpha^2+2pq\alpha\beta+(1+q^2)\beta^2.$$

Ainsi l'expression (a) du rayon de courbure devient, en mettant pour σ^2 cette valeur, et pour 2δ la valeur qui se déduit de l'équation (e),

$$\rho=\sqrt{p^2+q^2+1}.\frac{(1+p^2)\alpha^2+2pq\alpha\beta+(1+q^2)\beta^2}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2} \quad \text{..... } (g)$$

Cette formule donnera le rayon de courbure d'une section normale quelconque lorsqu'on aura fixé le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, c'est-à-dire la projection sur le plan des xy de la tangente menée au point m à cette section normale.

568. D'une section normale à une autre, le rayon de courbure varie proportionnellement aux quarrés des demi-diamètres de l'indicatrice. Cette ligne, dont la projection sur le plan des xy est donnée par l'équation (e) du second degré, est toujours disposée symétriquement par rapport au point m, et les valeurs maximum et minimum du rayon de courbure correspondront évidemment à ses diamètres rectangulaires. Pour les déterminer de la manière la plus simple, on remarquera qu'en différentiant les équations (d) et (e) auxquelles les coordonnées des points de l'indicatrice doivent toujours satisfaire, on a

$$d\gamma = p\,d\alpha + q\,d\beta,$$
$$0 = (r\alpha + s\beta)\,d\alpha + (s\alpha + t\beta)\,d\beta.$$

De plus si ρ, et par conséquent σ, doivent être un maximum ou un minimum, on a par l'équation (f)

$$0 = \alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma\,;$$

ou, à cause de la valeur précédente de $d\gamma$,

$$0 = (\alpha + p\gamma)\,d\alpha + (\beta + q\gamma)\,d\beta.$$

Donc

$$\frac{\alpha + p\gamma}{r\alpha + s\beta} = \frac{\beta + q\gamma}{s\alpha + t\beta} = \frac{\alpha(\alpha + p\gamma) + \beta(\beta + q\gamma)}{\alpha(r\alpha + s\beta) + \beta(s\alpha + t\beta)}.$$

Or, la dernière de ces trois quantités est précisément le second facteur de l'expression (g) du rayon de courbure ρ. Donc, si l'on représente par R la valeur maximum ou minimum de ce rayon, et si l'on fait pour abréger

$$Z = \frac{R}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

on pourra écrire

$$Z = \frac{\alpha + p\gamma}{r\alpha + s\beta} \quad \text{et} \quad Z = \frac{\beta + q\gamma}{s\alpha + t\beta},$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} Z(r\alpha+s\beta) &= (1+p^2)\alpha + pq\beta \\ Z(s\alpha+t\beta) &= pq\alpha + (1+q^2)\beta \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (h)$$

Nous en déduirons d'abord en éliminant Z,

$$-[(1+p^2)s-pqr]\alpha^2+[1+q^2)r-(1+p^2)t]\alpha\beta+[(1+q^2)s-pqt]\beta^2=0,$$

équation qui donne

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\left[\begin{array}{c} -[(1+q^2)r-(1+p^2)t] \\ \pm\sqrt{[1+q^2)r-(1+p^2)t]^2+4[1+p^2)s-pqr][(1+q^2)s-pqt]} \end{array}\right]}{2[(1+q^2)s-pqt]},$$

ce qui revient à

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\left[\begin{array}{c} -[1+q^2)r-(1+p^2)t] \\ \pm\sqrt{[(1+q^2)r-2pqs+(1+q^2)]^2-4(p^2+q^2+1)(rt-s^2)} \end{array}\right]}{2[(1+q^2)s-pqt]}, \dots \quad (i)$$

ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

Nous déduirons en second lieu des équations (h), par l'élimination de α et β,

$$(rt-s^2)Z^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]Z+p^2+q^2+1=0;$$

d'où, en se rappelant que $R = Z\sqrt{p^2+q^2+1}$,

$$R = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{2(rt-s^2)} \left[\begin{array}{c} (1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t \\ \pm\sqrt{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(p^2+q^2+1)(rt-s^2)} \end{array}\right] \dots$$

Les deux valeurs données par la formule (i) représentent les tangentes trigonométriques des angles formés avec l'axe des x par les projections sur le plan des xy

des axes rectangulaires de l'indicatrice ; ou des lignes d'intersection du plan tangent à la surface avec les plans normaux qui contiennent le plus grand et le plus petit rayon de courbure. Les deux valeurs données par la formule (k) appartiennent à ces rayons mêmes, qui sont appelés généralement *rayons de courbures principaux.*

Nous remarquerons que les formules (i) et (k) donnent toujours des valeurs réelles ; car on a identiquement

$$(1+p^2)^2\{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(p^2+q^2+1)(rt-s^2)\}=$$
$$\{(1+p^2)[(1+p^2)t-(1+q^2)r]+2pq[pqr-(1+p^2)s]\}^2$$
$$+4(p^2+q^2+1)[pqr-(1+p^2)s]^2.$$

569. La valeur du rayon de courbure d'une section normale quelconque s'exprime très-simplement en fonction des deux rayons de courbure principaux. Concevons en effet les positions des plans coordonnés, changées de manière que le plan des xy devienne parallèle au plan tangent mené à la surface proposée au point m. On aura donc pour ce point $p=0, q=0$, et l'équation (e), appartenant à l'indicatrice, se réduira à

$$2\delta = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2.$$

Si de plus les axes des x et des y étaient placés de manière à coïncider avec les axes rectangulaires de l'indicatrice, on voit par cette équation que l'on aurait $s=0$. Ainsi, en faisant $p=0, q=0$ et $s=0$, on exprime les conditions nécessaires pour que les plans des xz et des yz coïncident avec les plans des sections normales auxquelles appartiennent les deux rayons de courbure principaux. Dans ce cas, l'expression (g) du rayon de courbure d'une section normale quelconque, se réduit à

$$\rho=\frac{\alpha^2+\beta^2}{r\alpha^2+t\beta^2};$$

et en représentant par φ l'angle formé par le plan de cette section normale avec le plan des xz, elle prendra la forme

$$\rho=\frac{1}{r\cos.^2\varphi+t\sin.^2\varphi}.$$

Nous remarquerons d'abord que cette expression donne

$$\frac{1}{\rho}=(r\cos.^2\varphi+t\sin.^2\varphi),$$

et que si l'on appelait ρ_1 le rayon de courbure appartenant à la section normale, dont le plan est perpendiculaire à celui de la section à laquelle appartient le rayon ρ, on aurait

$$\frac{1}{\rho_1}=(r\sin.^2\varphi+t\cos.^2\varphi).$$

Donc

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}=r+t,$$

équation très-remarquable, d'où l'on conclut que la somme des inverses des rayons de courbure appartenant à deux sections normales quelconques rectangulaires est constante. Ainsi l'on a toujours

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}.$$

R et R_1 représentant les rayons de courbure principaux.

D'ailleurs, l'équation qui a donné, dans le n° 568, l'expression (k) des rayons de courbure principaux, indique que l'on a en général

$$R+R_1=\sqrt{p^2+q^2+1}\,\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{rt-s^2},$$

$$RR_1=\frac{(p^2+q^2+1)^2}{rt-s^2};$$

et par conséquent

$$\frac{R+R_1}{RR_1}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

570. Si maintenant on fait successivement $\varphi=0$ et $\varphi=\frac{\pi}{2}$ dans l'expression $\rho=\frac{1}{r\cos.^2\varphi+t\sin.^2\varphi}$ du n° précédent, elle donnera

$$R=\frac{1}{r} \quad \text{et} \quad R_1=\frac{1}{t}$$

pour les valeurs des rayons de courbure principaux appartenant respectivement aux sections normales qui coïncident avec les plans des xz et des yz. D'où il suit que l'expression de ρ, du n° 568, peut être remplacée par la suivante :

$$\rho=\frac{RR_1}{R_1\cos.^2\varphi+R\sin.^2\varphi}, \quad \text{ou} \quad \rho=\frac{2RR_1}{R+R_1-(R-R_1)\cos.^2\varphi}.$$

On connaît ainsi la valeur du rayon de courbure d'une section normale quelconque en fonction des deux rayons de courbure principaux, et de l'angle φ formé par cette section normale avec celle qui contient le rayon R.

Il résulte de ce qui précède que deux surfaces qui se touchent en un point donné, si elles ont les mêmes rayons de courbure principaux, ont en ce point dans tous les sens un contact du second ordre, c'est-à-dire que toutes les sections normales faites dans ces deux surfaces ont respectivement des rayons de courbure égaux. On voit aussi que, dans une étendue infiniment petite autour d'un point quelconque m d'une surface, on peut concevoir cette surface comme pouvant être décrite de deux manières par la révolution d'un arc de

cercle, savoir : 1° par la révolution du plus grand cercle osculateur tournant autour d'un axe tracé dans son plan perpendiculairement à la normale, et passant par le centre du plus petit cercle osculateur ; 2° par la révolution du plus petit cercle osculateur tournant autour d'un axe tracé dans son plan perpendiculairement à la normale, et passant par le centre du plus grand cercle osculateur. En effet, les deux surfaces ainsi *décrites*, ont évidemment les deux mêmes rayons de *courbure* principaux que la surface proposée.

571. Considérons maintenant (fig. 55) une section faite obliquement dans la surface par un plan mené par la tangente *mh* de la section normale *nmn'*, à laquelle appartient le rayon de courbure ρ. Soit *omo'* l'intersection de ce plan oblique avec la surface, et *oo'* l'intersection de ce même plan avec le plan de l'indicatrice. Désignons par ω l'angle formé par la normale *mf* avec la perpendiculaire *mg*, menée dans le plan oblique à la tangente *mh*. Si l'on demande la valeur du rayon de courbure de la section oblique *omo'*, on remarquera que la différence des lignes *nf* et *og*, ou celle des arcs *mn* et *mo*, est du même ordre que la distance *mf*, c'est-à-dire infiniment petite par rapport à ces arcs eux-mêmes. On peut donc prendre *mn* pour la longueur de l'arc *mo*. Ainsi le rayon de courbure de la section oblique *omo'* étant d'après le n° 565

$$\frac{\overline{mo}^2}{2.mg},$$

on peut écrire, au lieu de cette expression,

$$\frac{\overline{mn}^2}{2.\dfrac{mf}{\cos.\omega}}=\rho\cos.\omega=\frac{RR_{,}\cos.\omega}{R_{,}\cos.^2\varphi+R\sin.^2\varphi}.$$

Cette formule donne, d'une manière très-simple, le rayon de courbure d'une section oblique quelconque, faite dans une surface, en fonction des deux rayons de courbure principaux ; de l'angle φ formé par la tangente de la section oblique avec le plan de la section qui contient le rayon ρ ; et de l'angle ω compris entre le plan de la section oblique et la normale à la surface.

Des lignes de courbure.

572. Les sections normales correspondantes aux axes rectangulaires de l'indicatrice, auxquelles appartiennent les rayons de courbure principaux, présentent une propriété très-remarquable. Soit (fig. 56) *non* l'indicatrice, *m* le centre de cette courbe, et *nn* la trace d'une section normale quelconque. Si l'on voulait mener par le point *n* une normale à la surface, cette ligne devrait être perpendiculaire en même temps à la section normale projetée en *nn*, et à la tangente *ni* menée à l'indicatrice au point *n*. La projection de cette normale sur le plan de l'indicatrice serait donc la ligne *nk* perpendiculaire à *ni*, et par conséquent la normale dont il s'agit ne rencontrera pas en général la normale à la surface menée par le point *m*. Mais les deux normales se rencontreront si la trace *nn* coïncide avec l'un ou l'autre des axes rectangulaires NN,N'N', de l'indicatrice. Ainsi, en chaque point d'une surface, les sections normales auxquelles appartiennent les rayons de courbure principaux se distinguent de toutes les autres par une propriété caractéristique, qui consiste en ce que la normale à la surface, pour le point dont il s'agit, rencontre la normale pour un point infiniment

voisin, pris sur l'une ou sur l'autre de ces deux sections. Le point de rencontre de ces deux normales est évidemment le centre de courbure de la section.

L'existence de cette propriété peut être vérifiée immédiatement de la manière suivante. Considérons la normale menée à la surface au point m, et soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne. Ses équations seront, d'après le n° 217,

$$x-x'+p(z-z')=0,$$
$$y-y'+q(z-z')=0;$$

et si on les différentie par rapport à x, y, z, en y regardant $x', y' z'$, comme des constantes, les équations obtenues de cette manière appartiendront à une ligne infiniment voisine qui satisfera aux deux conditions d'être normale à la surface, et d'avoir avec la première normale un point commun. Cette différentiation donne

$$dx+dp(z-z')+pdz=0,$$
$$dy+dq(z-z')+qdz=0;$$

ou, en faisant attention que $dz=pdx+qdy, dp=rdx+sdy$. $dq=sdx+tdy$,

$$(1+p^2)dx+pqdy+(rdx+sdy)(z-z')=0,$$
$$pqdx+(1+q^2)dy+(sdx+tdy)(z-z')=0.$$

En éliminant maintenant $z-z'$ entre ces deux dernières équations, ce qui donne

$$\left[(1+q^2)s-pqt\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[(1+q^2)r-(1+p^2)t\right]\frac{dy}{dx}-\left[(1+p^2)s-\right.$$

$$=0,$$

on obtient une équation à laquelle doit satisfaire la valeur de $\frac{dy}{dx}$ appartenant à la projection horizontale de la courbe suivant laquelle il faut se déplacer sur cette surface pour satisfaire à la condition que deux normales infiniment voisines soient comprises dans un même plan. Or, cette équation est précisément celle qui donne les deux valeurs du rapport $\frac{6}{\alpha}$ auxquelles correspondent les rayons de courbure principaux. On reconnaît d'ailleurs immédiatement que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ données par cette équation appartiennent respectivement à deux lignes qui se coupent à angles droits, lorsqu'on suppose, comme dans le n° 569, la position des plans coordonnés changée de manière que le plan des yx devienne parallèle au plan qui touche la surface au point m. On a alors $p=0, q=0$, et l'équation précédente se réduit à

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{r-t}{s}\left(\frac{dy}{dx}\right)-1=0:$$

les deux racines donneraient donc les tangentes trigonométriques de deux angles suppléments l'un de l'autre, c'est-à-dire que les directions des courbes auxquelles elles appartiendraient seraient perpendiculaires entre elles.

Si l'on élimine maintenant $\frac{dy}{dx}$ entre les deux équations qui ont été trouvées ci-dessus, on aura

$$(rt-s^2)(z-z')^2+[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t](z-z')+1+p^2+q^2=0.$$

Cette équation, réunie aux deux équations de la nor-

male, donnera les coordonnées x', y', z' du point de rencontre des deux normales consécutives, c'est-à-dire du centre de courbure. Comme elle est du second degré, chacune de ces coordonnées aura en général deux valeurs, en sorte qu'il y aura sur la même normale deux centres de courbure appartenant respectivement aux sections rectangulaires déterminées par l'équation précédente. Quant à la grandeur du rayon de courbure, si on la désigne comme ci-dessus par R, on a évidemment

$$z'-z=\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

L'équation que l'on vient d'obtenir s'accorde donc avec celle qui a été trouvée n° 568, et dont on a déduit l'expression (k) des rayons de courbure principaux de la surface.

573. On voit, par ce qui précède, qu'après s'être placé en un point quelconque d'une surface, on peut toujours passer de ce point à un point voisin suivant deux directions qui forment entre elles un angle droit, avec la condition que les normales menées à la surface par les deux points seront comprises dans le même plan, et se rencontreront. Après s'être ainsi transporté dans un second point on peut passer à un troisième, puis à un quatrième, et ainsi de suite, en s'assujettissant toujours à la même condition. On tracera de cette manière sur la surface une ligne continue, que l'on a nommée *ligne de courbure*, et dont la considération est importante. Il existe toujours, pour chaque point d'une surface, deux lignes de courbure, qui se coupent à angles droits dans ce point. En concevant toutes ces lignes tracées sur

la surface, on voit qu'elles la divisent en deux systèmes de zônes, dont le croisement forme des figures rectangulaires. Les deux lignes de courbure qui se coupent en chaque point, correspondent aux sections normales de plus grande et de plus petite courbure, c'est-à-dire aux *sections normales principales*.

L'équation

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+q^2)t]\frac{dy}{dx}-\Big[(1+p^2)s-pqr\Big]$$

$$=0$$

qui a été obtenue précédemment, est l'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy. Comme celle du second degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, son intégrale contiendra une constante arbitraire élevée au quarré; et si l'on veut déterminer cette constante de manière à faire passer la ligne de courbure par un point donné de la surface, on trouvera deux valeurs qui appartiendront respectivement aux lignes de courbure de chaque système.

En éliminant r et t au moyen des relations $dp=rdx+sdy$, $dq=sdx+tdy$, et en se rappelant que $dz=pdx+qdy$, cette équation prend la forme

$$dp(dy+qdz)=dq(dx+qdz)$$

qui doit être remarquée.

574. L'examen des diverses figures que peut affecter la courbe appelée indicatrice est très-propre à faire juger des modifications que présente la courbure des surfaces. L'équation (b) du n° 566, dans laquelle on n'a conservé que les termes du second ordre en α et β,

$$\gamma=p\alpha+q\beta+\frac{1}{2}(r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2),$$

appartient à une surface du second degré ; d'où l'on conclut qu'une telle surface peut en général avoir dans toutes les directions autour d'un point quelconque une osculation du second ordre avec la surface proposée. La surface proposée et la surface du second degré osculatrice doivent être regardées comme se confondant l'une avec l'autre dans une étendue infiniment petite autour du point m, et l'indicatrice comme appartenant à l'une et à l'autre. L'équation (e) de la projection de l'indicatrice sur un plan parallèle au plan des xy a été donnée n° 566 : nous l'écrirons simplement

$$D = r\alpha^2 + 2s\alpha 6 + t6^2,$$

en faisant pour abréger $D = 2\delta\sqrt{p^2+q^2+1}$; cette équation résolue par rapport à 6 donne

$$6 = \frac{-s\alpha \pm \sqrt{Dt - (rt - s^2)\alpha^2}}{t}.$$

575. Si la fonction $rt - s^2$ est positive, l'indicatrice est une ellipse, et la surface osculatrice du second degré est un ellipsoïde. Tous les diamètres de l'ellipse étant réels, les quarrés de ces diamètres, auxquels les rayons de courbure des sections normales sont proportionnels, sont tous positifs. Toutes les sections normales ont leurs courbures tournées dans le même sens. Le même résultat se conclut de l'expression (k) du n° 568.

576. Si la fonction $rt - s^2$ est négative, l'indicatrice est une hyperbole, et la surface osculatrice du second degré est un hyperboloïde. Les diamètres de l'indicatrice, ayant leurs quarrés positifs, tandis que les diamètres imaginaires ont leurs quarrés négatifs, les deux

courbures principales de la surface sont tournées en sens contraires ; et en général, parmi les diverses sections normales, les unes ont leur courbure tournée dans un sens, les autres dans le sens opposé. Les asymptotes de l'hyperbole, dans la direction desquelles la courbure est nulle, séparent les sections normales qui ont respectivement leur courbure tournée dans un sens ou dans l'autre.

On obtiendra la direction de ces asymptotes en égalant à zéro le dénominateur de l'expression (g) du n° 567, ce qui donne

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2=0.$$

Ainsi l'équation différentielle

$$r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

appartient à la projection sur le plan des xy des courbes tracées sur la surface proposée dans le sens desquelles la courbure est nulle, ou le rayon de courbure infini.

L'équation différentielle

$$dz=pdx+qdy$$

appartient également au plan tangent à la surface au point m, et à la surface elle-même ; on en déduit

$$d^2z=dp.dx+dq.dy, \qquad \text{ou} \qquad d^2z=rdx^2+2sdydx+tdy^2.$$

Mais on a pour le plan tangent $d^2z=0$: donc en écrivant

$$rdx^2+2sdydx+tdy^2=0,$$

on établit entre dx et dy une relation qui appartient à la ligne d'intersection de la surface proposée et de son plan tangent. Ainsi dans les surfaces du genre de celles

dont il s'agit, c'est-à-dire lorsque les deux courbures principales sont dirigées en sens contraires, la surface est coupée par son plan tangent suivant deux lignes dont les directions coïncident avec les asymptotes de l'indicatrice.

L'angle compris entre ses asymptotes peut faire juger du rapport des deux courbures. En effet, le rapport des deux axes de l'hyperbole étant exprimé par la tangente trigonométrique de cet angle, le rapport des rayons de courbure principaux le sera par le quarré de cette tangente trigonométrique.

577. Si la fonction $rt-s^2$ a une valeur nulle, l'expression de ε du n° 574 se réduit à

$$\varepsilon = \frac{-s\alpha \pm \sqrt{Dt}}{t}$$

et représente le système de deux lignes droites, formant avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique est $-\frac{s}{t}$. L'indicatrice est donc formée ici de deux lignes droites parallèles, et la surface osculatrice du second degré est une surface cylindrique. Tous les diamètres de l'indicatrice étant réels, la surface a toutes ses courbures dirigées dans le même sens ; mais la courbure est nulle dans le sens des lignes droites dont il s'agit. En effet, en supposant $rt-s^2=0$ dans l'expression (k) du n° 568, qui donne les valeurs des rayons de courbure principaux, on voit que l'une des racines de cette équation est alors finie, l'autre infinie, et qu'elles sont de même signe. La propriété d'avoir un contact du second ordre avec une surface cylindrique, appartient

aux surfaces appelées *développables*, et les caractérise. L'équation aux différences partielles du second ordre

$$rt - s^2 = 0,$$

qui exprime cette propriété, convient à toutes les surfaces de ce genre.

578. Les deux valeurs de R données par l'expression (k) du n° 568 seront égales et de même signe si l'on a

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4(1+p^2+q^2)(rt - s^2) = 0.$$

Cette dernière équation exprime donc la condition nécessaire pour que les deux rayons de courbure principaux soient égaux entre eux et dirigés dans le même sens. L'expression de ρ du n° 570 montre que dans ce cas les rayons de courbure de toutes les sections normales sont égaux entre eux. Les points d'une surface où cette circonstance se présente, et dans lesquels l'indicatrice est un cercle, sont ordinairement très-remarquables : on leur a donné le nom d'*ombilics*. Il importe d'observer que d'après la remarque qui a été faite à la fin du n° 568, l'équation précédente ne peut pas subsister à moins que l'on n'ait séparément les deux équations

$$(1+q^2)r - (1+p^2)t = 0,$$
$$(1+p^2)s - pqr = 0,$$

lesquelles entraînent la suivante

$$(1+q^2)s - pqt = 0.$$

On peut se convaincre d'ailleurs que l'égalité des deux rayons de courbure principaux entraîne toujours l'existence de la double équation

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t},$$

en remarquant que la formule du n° 570 prouvant que les



rayons de courbure de toutes les sections normales sont alors égaux entre eux, il est nécessaire que le rapport $\frac{6}{\alpha}$ disparaisse dans l'expression (g) du n° 567, ce qui ne pourrait avoir lieu si cette double équation n'existait point.

Cette double équation rendant identique l'équation du n° 568 dont dépend l'expression de $\frac{6}{\alpha}$, ou (ce *qui est* la même chose), l'équation du n° 572, dont dépend l'expression de $\frac{dy}{dx}$ qui convient aux directions des lignes de courbure principales, on ne peut plus rien conclure relativement à ces directions. Il existe des ombilics où il ne passe qu'une seule ligne de courbure principale, d'autres où il en passe un nombre fini plus grand que deux, d'autres enfin où un nombre infini de lignes de courbure se croisent dans toutes les directions. Les sommets ou pôles des surfaces de révolution sont dans ce dernier cas. La distinction des divers cas qui se présentent peut se déduire de l'équation même

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}-\left[(1+p^2)s-pqr\right]=0$$

dont il s'agit, en la différentiant successivement par rapport à x et y, $\frac{dy}{dx}$ étant regardé comme constant. On obtient ainsi des équations du troisième, quatrième, etc. degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, qui donneront les valeurs propres à mettre en évidence les véritables directions des lignes de courbure.

La surface sphérique est la seule pour tous les points de laquelle on ait la relation

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}.$$

579. Les deux valeurs de R données par la formule (k) du n° 568, seront égales et de signes contraires si l'on a

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Dans ce cas les deux courbures principales sont égales et dirigées en sens opposés. L'indicatrice est une hyperbole équilatère. Les sections normales, placées symétriquement par rapport aux axes ou aux asymptotes de cette hyperbole, présentent des courbures égales entre elles. Les lignes dans le sens desquelles la courbure est nulle, se croisent à angles droits comme les lignes de courbure principales. L'équation précédente ne diffère point d'ailleurs de celle qui a été trouvée n° 517, pour l'expression de la condition que l'aire de la surface comprise dans un contour quelconque soit un minimum. Ainsi les surfaces qui satisfont à cette condition ont la propriété d'avoir dans tous leurs points leurs deux rayons de courbure principaux égaux et dirigés en sens contraires, proposition qui ne peut être démontrée directement.

De la surface lieu des centres de courbure.

580. Un point m étant pris sur une surface donnée, concevons les deux lignes de courbure qui se croisent en ce point, et le plan normal qui est dirigé dans le sens de l'une des lignes de courbure. Si l'on admet que ce plan se meut dans l'espace sans cesser d'être normal

à la surface proposée, et tangent à la ligne de courbure dont il s'agit, l'espace qu'il décrira aura pour enveloppe une surface développable, coupant à angles droits la surface proposée. Cette surface développable sera le lieu de toutes les normales à la surface proposée, menées par la ligne de courbure, et ces normales en seront les caractéristiques. Les intersections des normales consécutives traceront sur la surface développable une de ces lignes remarquables que l'on a désignées sous le nom d'*arétes de rebroussement*. L'arête de rebroussement sera le lieu des centres de courbure correspondants aux différents points de la ligne de courbure, qui a servi de directrice au mouvement du plan normal.

En concevant également le plan normal à la surface au point *m*, qui est dirigé dans le sens de la seconde ligne de courbure, et admettant de même que ce plan se meut sans cesser d'être normal à la surface et tangent à cette ligne, on obtiendra une autre surface développable qui sera le lieu des normales à la surface proposée, menées par les points de la seconde ligne de courbure, et dont l'arête de rebroussement sera le lieu des centres de courbure correspondants à ces points.

On peut se représenter construites dans l'espace toutes les surfaces développables, appartenant au premier système de lignes de courbure de la surface proposée, et toutes les surfaces développables appartenant au second système de ces lignes de courbure. Les surfaces développables du premier système couperont partout à angles droits celles du second. Les deux systèmes de surfaces dont il s'agit, partageront l'espace en parties rectangulaires d'une longueur infinie, dans le sens des

normales à la surface proposée. La suite des arêtes de rebroussement des surfaces développables, appartenant au premier système, formera elle-même une autre surface, sur laquelle se trouveront tous les centres de l'une des courbures. La suite des arêtes de rebroussement des surfaces développables, appartenant au second système des lignes de courbure formera également une seconde surface, qui sera le lieu de tous les centres de l'autre courbure. Les surfaces lieu des centres de courbure sont, par rapport à la surface proposée, ce que la développée d'une courbe plane est par rapport à cette courbe.

581. Les équations des surfaces dont on vient de parler peuvent être obtenues comme il suit. Reprenons les équations de la normale du n° 572 :

$$\left.\begin{aligned} x-x'+p(z-z')=0, \\ y-y'+q(z-z')=0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

et les suivantes

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}-\left[(1+p^2)s-pqr\right]$$
$$=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(rt-s^2)(z-z')^2+[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t](z-z')+1+p^2+q^2$$
$$=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

qui en ont été déduites. L'équation (2) aux différences ordinaires entre les variables x et y appartient aux projections sur le plan des xy des lignes de courbure de la surface proposée. Cette équation du premier ordre et du second degré par rapport au coefficient $\frac{dy}{dx}$ étant intégrée, son intégrale sera complétée par une constante arbitraire qui s'y trouvera élevée au second degré. En déterminant donc cette constante de manière à faire

passer une ligne de courbure par un point donné, on trouvera deux valeurs, correspondant respectivement aux deux lignes de courbure qui se croisent dans tous les points de la surface. Indiquons pour abréger par (2′) l'intégrale générale de l'équation (2) dont il s'agit. Il est visible qu'en éliminant x,y,z entre l'équation de la surface proposée, les équations (1) et l'équation (2′), l'équation restante en x',y',z', appartiendra aux *surfaces* développables normales qui coupent la surface *suivant* ses lignes de courbure. Elle donnera l'une quelconque de ces surfaces développables en y déterminant convenablement la constante arbitraire qui s'y trouve contenue.

582. L'équation (3) est une équation primitive en x,y,z et z'. Elle doit donner la valeur de z', appartenant au point d'intersection de deux normales consécutives, c'est-à-dire au centre de courbure. En éliminant x,y,z entre l'équation de la surface proposée, les équations (1) et l'équation (3), on aura donc en x',y' et z' l'équation de la surface lieu des centres de courbure. Cette équation montera au second degré par rapport à z'. Si elle peut se décomposer en deux facteurs, on obtiendra, en les égalant séparément à zéro, les équations distinctes de deux surfaces qui contiendront respectivement les centres de l'une et de l'autre courbure de la surface proposée. Si cette décomposition n'a pas lieu, les centres des deux courbures se trouveront placés sur deux nappes appartenant à une surface unique.

Une normale quelconque à la surface proposée touche à la fois les deux nappes qui contiennent respectivement les centres de l'une et de l'autre courbure, et si l'on mène par cette normale deux plans tangents à ces deux nap-

pes, ces plans se couperont à angles droits. Donc les deux nappes de la surface lieu des centres de courbure sont toujours telles, qu'étant regardées d'un point quelconque, leurs contours apparents paraissent se croiser à angles droits. Ainsi une surface quelconque n'est pas propre à devenir le lieu des centres de courbure d'une autre surface; on peut prendre arbitrairement le lieu des centres de l'une des courbures ; mais la surface qui contiendrait les centres de l'autre courbure doit être telle que son contour apparent paraisse toujours couper celui de la première à angles droits.

583. Lorsque la surface qui contient les centres de l'une des courbures coupe la surface qui contient les centres de l'autre courbure, les points d'intersection appartenant également à l'une et à l'autre courbure, répondent aux points de la surface proposée, pour lesquels les deux rayons de courbure principaux sont égaux entre eux, points qui sont déterminés par l'équation

$$[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)=0,$$

comme on l'a vu n° 578. Cette équation donne la projection sur le plan des xy de la ligne des *courbures sphériques* sur la surface proposée.

584. Chacune des arêtes de rebroussement des surfaces développables normales, dont la réunion forme les deux nappes de la surface lieu des centres de courbure est une ligne de plus courte distance sur cette dernière surface. En effet, le plan passant par deux normales consécutives, appartenant à l'une de ces surfaces développables normales, est en même temps le plan oscu-

lateur de l'arête de rebroussement au point d'intersection de ces deux normales, et perpendiculaire au même point à la nappe de la surface lieu des centres de courbure, sur laquelle cette arête de rebroussement est placée. Or, le caractère de la ligne de plus courte distance sur une surface quelconque consiste en ce que le plan osculateur de cette ligne soit en même temps normal à la surface

Concevons un fil dont une extrémité est fixée sur un point de la ligne d'intersection des deux nappes qui contiennent respectivement les centres de l'une et l'autre courbure. En tendant ce fil, et le faisant mouvoir de manière qu'il soit en partie plié sur cette intersection, et que la portion libre soit dirigée dans le sens de la tangente, l'extrémité opposée décrira la ligne des courbures sphériques sur la surface proposée. Si l'on fait ensuite mouvoir le même fil de manière qu'il soit en partie plié sur l'intersection des deux nappes dont on vient de parler, et en partie sur l'une ou sur l'autre de ces nappes, l'extrémité pourra se transporter dans tous les points de la surface proposée, qui peut ainsi être décrite de deux manières différentes par le mouvement d'un fil plié sur la surface lieu des centres de courbure, comme l'est une courbe par le mouvement d'un fil plié sur sa développée.

Exemple de la détermination des lignes de courbure et des rayons de courbure.

585. Soit

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

l'équation de la surface proposée. Cette surface est un

paraboloïde dont l'axe des z est l'axe principal. Les sections faites parallèlement au plan des xy sont des ellipses ayant leurs axes dirigés dans le sens des x et dans le sens des y. La longueur des demi-axes de ces sections dans le sens des x est $\sqrt{2az}$, et la longueur des demi-axes dans le sens des y est $\sqrt{2bz}$. Nous supposerons ici $a>b$.

Nous aurons

$$\frac{dz}{dx}=p=\frac{x}{a}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2}=r=\frac{1}{a},$$
$$\frac{dz}{dy}=q=\frac{y}{b}, \qquad \frac{d^2z}{dxdy}=s=0,$$
$$\frac{d^2z}{dy^2}=t=\frac{1}{b};$$

et ces valeurs étant substituées dans l'équation des lignes de courbure

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}-\left[(1+p^2)s-pqr\right]=0,$$

qui a été trouvée n° 572, il viendra

$$-\frac{xy}{ab^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{1}{a}-\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{1}{b}\right]\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{a^2b}=0.$$

Cette équation, en posant pour abréger

$$A=\frac{a}{b}, \qquad B=a(a-b),$$

s'écrira

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-Ay^2+B)\frac{dy}{dx}-xy=0 \;\ldots\ldots\ldots(m)$$

elle appartient à la projection des lignes de courbure de la surface proposée sur le plan des xy.

Pour l'intégrer on la différentiera d'abord, ce qui donnera

$$\left(2Axy\frac{dy}{dx}+x^2-Ay^2+B\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0,$$

puis on éliminera B entre cette équation du second ordre et l'équation (*m*). La constante A disparaîtra également du résultat de l'élimination, et l'on trouvera

$$x\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]-y\frac{dy}{dx}=0.$$

Cette dernière équation étant multipliée par le facteur $\frac{dx}{x^2}$ devient

$$\frac{x\,d.y\frac{dy}{dx}-y\frac{dy}{dx}d.x}{x^2}=0,$$

dont le premier membre est la différentielle exacte de $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$. On a donc en intégrant une première fois

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\alpha, \quad \text{ou} \quad ydy=\alpha.xdx;$$

et en intégrant une seconde fois

$$y^2=\alpha x^2+\beta,$$

α et β étant deux constantes.

L'équation $y^2=\alpha x^2+\beta$ est l'intégrale générale de l'équation (*m*). Mais comme cette dernière n'est que du premier ordre, son intégrale ne doit contenir qu'une seule constante arbitraire. L'une des constantes α, β, est déterminée par la condition que l'équation $y^2=\alpha x^2+\beta$ satisfasse à l'équation (*m*). En substituant donc dans l'équation les valeurs

$$y = \pm\sqrt{\alpha x^2 + 6}, \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2 + 6}},$$

on trouve pour condition

$$A\alpha 6 - B\alpha + 6 = 0,$$

d'où

$$6 = \frac{B\alpha}{A\alpha + 1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 6 = \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha + b}.$$

L'équation sous forme finie des lignes de courbure est par conséquent

$$y^2 = \alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha + b}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (n)$$

dans laquelle α est la constante arbitraire.

586. Si l'on veut déterminer la constante α de manière que l'équation (n) appartienne à une ligne de courbure, passant par un point donné de la surface proposée dont les abscisses seraient x' et y', on fera $x=x', y=y'$ dans cette équation, et on la résoudra par rapport à α, ce qui donnera

$$\alpha = -\frac{c}{2ax'^2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2ax'^2}\right)^2 + \frac{b}{a}\frac{y'^2}{x'^2}},$$

en posant,

$$c = bx'^2 - ay'^2 + ab(a-b).$$

Ainsi l'on trouvera toujours, pour la constante α, deux valeurs réelles, l'une positive et l'autre négative; et ces valeurs étant substituées dans l'équation (n) donneront respectivement les équations des projections des deux lignes de courbure qui se croisent dans le point auquel appartiennent les abscisses x', y'.

La valeur positive de α donnera, pour les projections du premier système des lignes de courbure, des hyper-

boles ayant leur axe réel dirigé dans le sens de l'axe des y, dont les équations seront

$$y^2 = \alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha+b}.$$

La grandeur du demi-axe est $\sqrt{\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha+b}}$. La plus petite valeur que puisse prendre ce demi-axe est 0, ce qui répond aux cas où l'on supposerait x' très-grande et y' très-petite : les deux branches de l'hyperbole se confondent alors avec l'axe des x. La plus grande valeur que puisse prendre ce demi-axe est $\sqrt{b(a-b)}$, ce qui répond au cas où la valeur positive de α serait infinie, parce que l'on aurait supposé x' très-petite et y' très-grande. L'hyperbole s'écarterait alors très-peu de l'axe des y. Si l'on porte donc sur l'axe des y de part et d'autre de l'origine une distance égale à $\sqrt{b(a-b)}$, on aura deux points, au delà desquels les sommets des hyperboles qui donnent le premier système des lignes de courbure ne pourront pas être placés.

La valeur négative de α donnera pour les projections du second système de courbure, des ellipses ayant leurs axes rectangulaires dirigés dans le sens de l'axe des x et de l'axe des y, et dont les équations seront

$$y^2 = -\alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha-b}.$$

La grandeur du demi-axe, placé dans le sens de l'axe des x, est $\sqrt{\frac{ab(a-b)}{a\alpha-b}}$, et la grandeur du demi-axe, placé dans le sens de l'axe des y, est $\sqrt{\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha-b}}$, en so

que le rapport de ces deux axes est égal à $\sqrt{\alpha}$. En supposant x' extrêmement grande, la valeur négative de α est à fort peu près égale à $\frac{b}{a}$, ce qui est la plus petite valeur absolue que l'on puisse attribuer à cette quantité. A mesure que x' diminue, la valeur absolue de α augmente, pourvu que la quantité c demeure positive, et, cette condition étant satisfaite, α deviendra infiniment grande quand x' sera supposée infiniment petite. Alors l'axe de l'ellipse, placé dans le sens des x, sera infiniment petit, et la moitié de l'axe, placé dans le sens des y, sera égale à $\sqrt{b(a-b)}$. Il n'est pas possible, d'ailleurs, de supposer à la fois x' assez petite et y' assez grande pour que la quantité c devenant négative, la valeur de α puisse devenir aussi petite qu'on le voudrait ; car l'équation des lignes de courbure ne donne que des valeurs imaginaires quand α étant supposée négative, on attribue à cette constante une valeur absolue moindre que $\frac{b}{a}$. On voit que les points placés sur l'axe des y, à la distance $\sqrt{b(a-b)}$ de l'origine, forment ici une limite commune que les sommets des deux systèmes de lignes de courbure ne peuvent dépasser dans un sens ou dans l'autre.

Les axes des x et des y sont au nombre des lignes qui appartiennent aux projections des deux systèmes de lignes de courbure du paraboloïde.

587. L'équation générale de la projection de l'indicatrice

$$D = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$$

devient ici

$$D = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} :$$

cette projection appartient toujours à une ellipse, ainsi que le comporte la nature de la surface proposée, dont les deux courbures sont dans toute son étendue dirigées dans le même sens.

Quant à la relation

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

qui, d'après le n° 578, doit subsister dans les ombilics, c'est-à-dire dans les points où tous les rayons de courbure sont égaux, elle devient

$$\frac{a^2+x^2}{a}=\frac{xy}{0}=\frac{b^2+y^2}{b}.$$

Cette relation ne peut être satisfaite qu'en supposant $x=0$ et $y=\sqrt{b(a-b)}$, c'est-à-dire pour les points de la surface qui séparent les sommets des ellipses et des hyperboles appartenant respectivement aux deux systèmes de lignes de courbure. Les deux points dont il s'agit sont les seuls ombilics que la surface proposée puisse présenter. L'indicatrice y doit être circulaire ; en effet, le plan tangent est en ces deux points parallèle aux deux systèmes de plans qui coupent le paraboloïde suivant des cercles.

588. A l'égard des valeurs des rayons de courbure principaux, on trouvera, en substituant les expressions des coefficients différentiels p,q,r,s,t qui ont été données n° 585 dans l'expression (k) du n° 568 :

$$R=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}\left\{\frac{a^2+x^2}{a}+\frac{b^2+y^2}{b}\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left(\frac{a^2+x^2}{a}+\frac{b^2+y^2}{b}\right)^2-4ab\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1\right)}\right\}$$

589. Lorsqu'il s'agira d'un paraboloïde de révolution, les deux quantités désignées par a et b, seront égales entre elles. L'expression de α du n° 586 se réduira à

$$\alpha = -\frac{x'^2 - y'^2}{2x'^2} \pm \sqrt{\left(\frac{x'^2 - y'^2}{2x'^2}\right)^2 + \frac{y'^2}{x'^2}},$$

ou bien

$$\alpha = -\frac{x'^2 - y'^2}{2x'^2} \pm \frac{x'^2 + y'^2}{2x'^2}.$$

La valeur positive de α est donc $\frac{y'^2}{x'^2}$. L'équation des projections hyperboliques du premier système des lignes de courbure se réduit à

$$y^2 = \frac{y'^2}{x'^2} \cdot x^2,$$

et appartient au système de deux lignes droites qui se croisent à l'origine des coordonnées.

Quant à la valeur négative de α, elle est -1. Ainsi l'équation des projections elliptiques du second système des lignes de courbure devient

$$y^2 = -x^2 + \frac{0}{0}, \qquad \text{ou} \qquad y^2 + x^2 = \frac{0}{0},$$

qui appartient à un cercle dont le centre est placé à l'origine des coordonnées, et dont on peut fixer arbitrairement le rayon. En effet, les lignes de courbure dans une surface de révolution, sont évidemment dirigées dans le sens des méridiens et des parallèles.

La distance de l'ombilic au centre, exprimée ci-dessus par $\sqrt{b(a-b)}$, devient nulle : les deux ombilics se confondent en un seul qui est le sommet de la surface de révolution.

En faisant $a=b$, dans l'expression de R du n° 588, elle se réduit à

$$R=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+x^2+y^2}{a^2}}\left(\frac{2a^2+x^2+y^2}{a}\pm\frac{x^2+y^2}{a}\right).$$

Les deux rayons de courbure principaux dans le paraboloïde de révolution sont donc respectivement exprimés par

$$-\frac{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \quad \text{et} \quad -(a^2+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme l'équation de la parabole dont la révolution autour de l'axe des z décrit cette surface est

$$z=\frac{x^2+y^2}{2a},$$

on voit que la première expression donne le rayon de courbure du méridien, et que la seconde donne le rayon de la courbure dans le sens du parallèle. Cette dernière expression représente la valeur de la normale de la courbe méridienne ; ce qui doit être, puisque toutes les sections faites dans le sens des parallèles ont leur centre de courbure placé sur l'axe de la surface de la révolution.

XLIV. Des surfaces les plus simples dont l'équation aux différences partielles est du premier ordre.

590. Revenons aux notions présentées dans les n°s 472 et suivants. Une surface quelconque peut en général être considérée comme l'enveloppe de l'espace parcouru par une autre surface qui se déplace sans changer de figure suivant une loi donnée, ou qui se déplace en changeant à la fois de position et de figure suivant des lois également données. Nous représentons générale-

ment l'équation de l'enveloppée, exprimée en quantités finies, par

$$F(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots.)=0,$$

dans laquelle x,y,z désignent les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de cette surface; et $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots..$ plusieurs constantes arbitraires, dont les valeurs varient suivant les diverses positions ou les diverses figures que l'enveloppée peut affecter. Mais si l'on veut considérer la surface qui enveloppe une série déterminée des positions de l'enveloppée, afin d'en rechercher les propriétés, on ne peut plus regarder dans l'équation précédente les quantités $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots..$ comme tout à fait arbitraires et indépendantes les unes des autres. On doit concevoir que ces quantités sont liées par des relations qui distinguent la série des positions dont il s'agit. Par conséquent, laissant indéterminé un seul paramètre α, on regardera toutes les autres arbitraires $\beta,\gamma,\delta,\ldots..$ comme des fonctions données $\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\varpi(\alpha),\ldots..$ de ce paramètre, et l'on écrira au lieu de l'équation précédente pour représenter l'enveloppée

$$F\left\{x,y,z\ \varphi(\alpha),\psi(\alpha),\varpi(\alpha),\ldots..\right\}=0.$$

En donnant dans cette équation à α toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on aura une certaine série d'enveloppées, déterminée par la forme des fonctions $\varphi,\psi,\varpi\ldots..$; et si ces fonctions demeurent arbitraires, les résultats que l'on obtiendra seront généraux et conviendront à toutes les surfaces possibles qui peuvent être produites par le mouvement d'une enveloppée quelconque comprise dans l'équation $F(x,y,z,\ \alpha,\beta,\beta,\gamma,\delta,\ldots..)=0$.

591. En différentiant successivement par rapport aux variables indépendantes x,y l'équation $F=0$, on a deux nouvelles équations appartenant à l'enveloppée et à l'enveloppe, au moyen desquelles on peut éliminer deux des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Par conséquent, si l'équation $F=0$ ne contient que deux de ces constantes, il reste une équation aux différences partielles du premier ordre entièrement délivrée des constantes arbitraires, qui d'après cela appartient à toutes les enveloppées comprises dans l'équation $F=0$ aussi bien qu'à toutes les enveloppes que ces enveloppées peuvent produire, et qui exprime un caractère géométrique qui leur convient spécialement et les distingue de toutes les autres surfaces.

Si l'équation $F=0$ de l'enveloppée contenait trois constantes arbitraires α, β, γ, les équations différentielles du premier ordre ne suffiraient pas en général pour les éliminer : il faudrait passer aux équations du second ordre, et l'on trouverait alors une équation aux différences partielles du second ordre, entièrement délivrée des constantes ou des fonctions arbitraires, exprimant la propriété géométrique qui appartient à toutes les enveloppes, et qui les caractérise.

Si l'équation $F=0$ contenait quatre constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on serait en général obligé pour les éliminer de passer aux équations différentielles du troisième ordre; et ainsi de suite pour les cas où il y aurait un plus grand nombre de constantes arbitraires.

592. Lorsque l'équation de l'enveloppée

$$F\left\{x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha), \omega(\alpha), \ldots\right\} = 0$$

est donnée, l'équation générale de l'enveloppe exprimée

en quantités finies s'en déduit immédiatement. Car l'équation $F+\frac{dF}{d\alpha}d\alpha=0$, que l'on peut réduire à $\frac{dF}{d\alpha}d\alpha=0$, appartenant à l'enveloppée infiniment voisine, le système des équations

$$F=0\,,\qquad \frac{dF}{d\alpha}=0,$$

représente la courbe d'intersection de ces deux enveloppées, courbe que nous appelons caractéristique. Ces deux équations donneront donc toutes les caractéristiques possibles appartenant à la série des positions de l'enveloppée définie par les fonctions $\varphi, \psi, \varpi, \ldots$ quand on y fera varier α depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Donc, puisque l'enveloppe est évidemment le lieu de ces caractéristiques, l'équation de l'enveloppe est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$F=0\,,\qquad \frac{dF}{d\alpha}=0,$$

élimination qui ne peut être effectuée qu'après que les fonctions $\varphi, \psi, \varpi, \ldots\ldots$ auront été définies.

593. Il existe généralement sur une enveloppe quelconque, et par conséquent sur une surface quelconque (car toutes les surfaces peuvent être regardées comme des enveloppes), diverses lignes remarquables dont le caractère géométrique résulte de la définition seule de l'enveloppée, et subsiste, comme le caractère géométrique de l'enveloppe elle-même, indépendamment des lois arbitraires qui déterminent le mode de déplacement de cette enveloppée. Les équations aux différences ordinaires de ces lignes, comme on l'a vu dans les n°s 479 et

suivants pour la caractéristique, peuvent être déduites de l'équation aux différences partielles de la surface, qu'elles servent à intégrer; et l'on peut aussi obtenir leurs équations en quantités finies au moyen de celle de l'enveloppée.

Quant à la caractéristique, elle est représentée par le système des deux équations

$$F=0, \qquad \frac{dF}{d\alpha}=0,$$

qui, lorsque les fonctions $\varphi, \psi, \varpi, \ldots$ auront été définies, donneront toutes les caractéristiques appartenant à une même enveloppe quelconque en fixant convenablement la valeur de α.

594. Considérons maintenant les deux caractéristiques consécutives qui résultent de l'intersection deux à deux de trois enveloppées consécutives. Les équations de ces trois enveloppées étant représentées par $F=0$, $F+\frac{dF}{d\alpha}d\alpha=0$, $F+2\frac{dF}{d\alpha}d\alpha+\frac{d^2F}{d\alpha^2}d\alpha^2=0$, la première caractéristique est donnée par les deux équations $F=0$ et $\frac{dF}{d\alpha}=0$, et la seconde caractéristique par les deux équations $\frac{dF}{d\alpha}=0$ et $\frac{d^2F}{d\alpha^2}=0$. Ces deux lignes courbes se coupent en général en même temps qu'elles se touchent en un point déterminé par les valeurs de x, y, z, qui satisfont simultanément aux trois équations

$$F=0, \qquad \frac{dF}{d\alpha}=0, \qquad \frac{d^2F}{d\alpha^2}=0.$$

En attribuant successivement à α toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, les valeurs des x, y, z,

déduites de ces trois équations, appartiennent à la série des points dans lesquels chaque caractéristique est coupée et touchée par la caractéristique voisine. La suite de ces points forme toujours sur l'enveloppe une ligne remarquable, à laquelle on a donné le nom d'*arête de rebroussement*. Les arêtes de rebroussement partagent en général les surfaces en nappes distinctes : elles sont touchées par toutes les caractéristiques, et sont à leur égard de véritables enveloppes.

L'arête de rebroussement étant le lieu des points d'intersection de la caractéristique correspondante à une valeur déterminée de α, et de la caractéristique voisine, on a évidemment les équations de cette courbe pour une enveloppe déterminée en éliminant α entre les trois équations

$$F=0, \qquad \frac{dF}{d\alpha}=0, \qquad \frac{d^2F}{d\alpha^2}=0,$$

élimination qui ne pourra avoir lieu qu'après que les fonctions $\varphi, \psi, \varpi, \ldots$ qui définissent l'enveloppe auront été données. Les deux équations en x, y, z, qui résultent de cette élimination, appartiennent donc à l'arête de rebroussement.

595. Considérons encore trois caractéristiques consécutives résultant de l'intersection deux à deux des quatre enveloppées consécutives, dont les équations sont

$$F=0, F+\frac{dF}{d\alpha}d\alpha=0, F+2\frac{dF}{d\alpha}d\alpha+\frac{d^2F}{d\alpha^2}d\alpha^2=0,$$
$$F+3\frac{dF}{d\alpha}d\alpha+3\frac{d^2F}{d\alpha^2}d\alpha^2+\frac{d^3F}{d\alpha^3}d\alpha^3=0.$$

Si ces trois caractéristiques se coupent en un seul point,

ce qui ne peut avoir lieu que dans des cas très-particuliers, les valeurs de x, y, z, appartenant à ce point, satisferont à la fois aux quatre équations précédentes. Donc, si l'on élimine x, y, z entre les quatre équations,

$$F=0, \quad \frac{dF}{d\alpha}=0, \quad \frac{d^2F}{d\alpha^2}=0, \quad \frac{d^3F}{d\alpha^3}=0,$$

l'équation en α, qui restera après cette élimination, donnera la valeur de ce paramètre, à laquelle correspondra la caractéristique sur laquelle le point dont il s'agit se trouvera placé. Il sera donc situé au lieu où cette caractéristique touche l'arête de rebroussement. Les points de cette espèce sont toujours très-remarquables sur cette arête, à l'égard de laquelle ils sont eux-mêmes des points d'inflexion ou de rebroussement.

596. Il arrive quelquefois que les caractéristiques d'une enveloppe ne se coupent nulle part, et par conséquent que la surface ne présente pas d'arête de rebroussement. Mais alors il existe en général un point sur chaque caractéristique où elle se trouve plus rapprochée de la caractéristique contiguë que dans tout autre lieu. La série de ces points forme sur la surface une ligne que l'on distingue facilement, et que l'on a nommée *ligne de striction*.

Surfaces cylindriques.

597. Une surface cylindrique, considérée de la manière la plus générale, peut être regardée comme l'enveloppe de l'espace décrit par un plan qui se meut sans cesser d'être parallèle à une même droite donnée prise pour directrice. Soient

$$x = az, \qquad y = bz,$$

les équations de cette directrice. L'équation d'un plan étant

$$z = Ax + By + C,$$

ce plan sera parallèle à la droite donnée si l'on a la relation

$$1 = Aa + Bb,$$

au moyen de laquelle on peut éliminer l'une des constantes A,B. En éliminant A, par exemple, il viendra

$$z = \frac{1 - Bb}{a} x + By + C,$$

pour l'équation d'un plan quelconque, parallèle à la droite donnée. Cette équation est ici celle de l'enveloppée, et B,C sont les deux constantes arbitraires qui en déterminent la position. En éliminant donc ces deux constantes entre cette équation et ses deux équations différentielles du premier ordre, qui sont

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1 - Bb}{a},$$

$$\frac{dz}{dy} = B,$$

il viendra

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1,$$

pour l'équation aux différences partielles du premier ordre qui appartient également à l'enveloppée et à l'enveloppe, c'est-à-dire au plan mobile et à une surface cylindrique quelconque décrite par ce plan.

On aurait pu reconnaître immédiatement que

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1,$$

appartient à une surface cylindrique quelconque, dont les arêtes sont parallèles à la droite ayant pour équations $x=az, y=bz$, en remarquant que tout plan tangent à cette surface doit être parallèle à la droite dont il s'agit.

598. Pour intégrer l'équation précédente, conformément à ce qui a été exposé dans les nos 478 et suivants, on formera les équations aux différences ordinaires de la caractéristique, qui seront ici

$$\begin{aligned} a\,dy - b\,dx &= 0, \\ a\,dz - dx &= 0, \\ b\,dz - dy &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations appartiennent évidemment à une ligne droite parallèle à la directrice, et l'on aurait pu les écrire immédiatement en remarquant que la caractéristique est l'intersection de deux plans parallèles à cette ligne. En intégrant les deux dernières il viendra

$$\begin{aligned} x &= az+\alpha, \\ y &= bz+\beta, \end{aligned}$$

α et β étant deux constantes arbitraires. L'intégrale générale est donc

$$y-bz=\varphi(x-az),$$

φ désignant une fonction arbitraire. Cette équation appartient à toute surface cylindrique, dont la génératrice est parallèle à la directrice proposée. Elle a le même degré de généralité que l'équation aux différences par-

tielles $a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1$. On pourrait la trouver directement en remarquant que les équations d'une génératrice quelconque peuvent être représentées par

$$x=az+\alpha$$
$$y=bz+\beta,$$

α et β étant deux constantes indéterminées. Or, si un point se meut sur la surface cylindrique sans sortir de cette même génératrice, les coordonnées de ce point satisferont à ces équations. Mais si le point se meut en passant sur une génératrice voisine, ses coordonnées ne pourront satisfaire à ces mêmes équations, à moins que l'on ne fasse varier en même temps α et β. Donc ces quantités demeurent constantes, ou varient simultanément : elles sont donc fonction l'une de l'autre, et l'on peut écrire $\beta=\varphi(\alpha)$, ou

$$y-bz=\varphi(x-az).$$

599. L'équation

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1 \quad \text{ou} \quad ap+bq=1$$

étant différentiée par rapport à x et à y, donne

$$a\frac{d^2z}{dx^2}+b\frac{d^2z}{dxdy}=0 \quad \text{ou} \quad ar+bs=0$$
$$a\frac{d^2z}{dxdy}+b\frac{d^2z}{dy^2}=0 \qquad as+bt=0.$$

Donc $rt-s^2=0$, équation générale des surfaces développables. Les surfaces cylindriques présentent, quant à leur courbure, les propriétés qui ont été indiquées n° 577.

600. La fonction φ, dans l'équation générale

$$y-bz=\varphi(x-az)$$

des surfaces cylindriques, peut être déterminée d'après diverses conditions. Si la surface doit passer par une ligne courbe donnée, dont les équations soient $\pi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$, il est visible que ces équations et les deux équations de la génératrice $x=az+\alpha$, $y=bz+\varphi(\alpha)$ doivent pouvoir être satisfaites par les mêmes valeurs de x,y,z, quelles que soient les constantes α et $\varphi(\alpha)$. Ainsi, éliminant x,y,z entre les quatre équations

$$\begin{aligned}\Pi(x,y,z)&=0\\ \Psi(x,y,z)&=0\\ x-az&=\alpha\\ y-bz&=\varphi(\alpha),\end{aligned}$$

il restera une équation entre α et $\varphi(\alpha)$, qui déterminera la fonction φ. Soit $f(\alpha,\varphi(\alpha))=0$ l'équation dont il s'agit : l'équation de la surface cylindrique demandée, sera donc

$$f(x-az,y-bz)=0.$$

601. Si la surface cylindrique doit être tangente à une surface courbe donnée, dont l'équation soit $\pi(x,y,z)=0$, on remarquera que, pour tous les points de la courbe de contact, les deux surfaces ont le même plan tangent. Donc les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, tirées de l'équation $\pi(x,y,z)=0$ doivent, pour les points dont il s'agit, satisfaire à l'équation différentielle de la surface cylindrique. On trouvera donc une équation $\psi(x,y,z)=0$ de la courbe de contact en prenant les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans l'équation donnée $\pi(x,y,z)=0$, et les substituant dans l'équation aux différences par-

tielles $a\frac{dz}{dy}+b\frac{dz}{dy}=1$. Ayant maintenant deux équations $\pi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$, appartenant à une courbe par laquelle doit passer la surface cylindrique cherchée, on opérera comme on l'a vu dans le numéro précédent.

Surfaces coniques.

602. Une surface conique est l'enveloppe de l'espace décrit par un plan qui passe constamment par un point donné. Ce point est le sommet, ou le centre de la surface. Soient a,b,c ses coordonnées : l'équation du plan mobile ou de l'enveloppée sera donc

$$z-c=A(x-a)+B(y-b)\ ;$$

A et B étant deux constantes arbitraires. On déduit de cette équation

$$\frac{dz}{dx}=A\ , \qquad \frac{dz}{dy}=B\ ;$$

et par conséquent l'élimination de ces deux constantes donne pour l'équation aux différences partielles des surfaces coniques, considérées de la manière la plus générale

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c.$$

On aurait pu obtenir directement cette équation en remarquant que tout plan tangent à la surface conique doit passer par le centre dont les coordonnées sont a,b,c.

603. Les équations de la caractéristique sont ici

$$\begin{aligned}(x-a)\,dy-(y-b)\,dx&=0\\(x-a)\,dz-(z-c)\,dx&=0\\(y-b)\,dz-(z-c)\,dy&=0\ ;\end{aligned}$$

elles appartiennent évidemment aux projections d'une ligne droite, passant par le point dont les coordonnées sont a,b,c. On déduit des deux dernières

$$\frac{x-a}{z-c}=\alpha,$$

$$\frac{y-b}{z-c}=\beta,$$

α et β représentant deux constantes arbitraires; et par conséquent l'intégrale de l'équation du numéro précédent, ou l'équation d'une surface conique quelconque, est

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

φ désignant une fonction arbitraire.

On aurait pu obtenir directement cette équation en remarquant que, quand un point se déplace sur une surface conique, les rapports $\frac{x-a}{z-c}$, $\frac{y-b}{z-c}$ demeurent tous deux constants si ce point reste sur une même arête rectiligne, et varient tous deux si le point dont il s'agit passe d'une arête à une autre. Ces rapports demeurant constants ou variant ensemble, sont donc fonction l'un de l'autre pour toutes les valeurs de x,y,z, qui satisfont à l'équation d'une surface conique.

604. L'équation

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c, \quad \text{ou} \quad (x-a)p+(y-b)q=z-c$$

étant différentiée par rapport à x et à y donne

$$(x-a)\frac{d^2z}{dx^2}+(y-b)\frac{d^2z}{dxdy}=0, \quad \text{ou} \quad (x-a)r+(y-b)s=0$$

$$(x-a)\frac{d^2z}{dxdy}+(y-b)\frac{d^2z}{dy^2}=0 \qquad (x-a)s+(y-b)t=0.$$

d'où $rt - s^2 = 0$, relation qui appartient à toutes les surfaces développables. On peut faire ici la même remarque qui a été faite n° 599.

605. Si dans l'équation générale

$$\frac{y-b}{z-c} = \varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$$

la fonction φ doit être déterminée par la condition que la surface conique passe par une courbe donnée dont les équations soient $\pi(x,y,z)=0$, $\Psi(x,y,z)=0$, les équations de la génératrice devront subsister en même temps que celles-ci. Posant donc les quatre équations

$$\Pi(x,y,z)=0$$
$$\Psi(x,y,z)=0$$
$$\frac{x-a}{z-c}=\alpha,$$
$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi(\alpha)$$

entre lesquelles on éliminera x,y,z. il restera une équation que nous représentons par $f[\alpha,\varphi(\alpha)]=0$. L'équation de la surface conique demandée sera donc

$$f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0.$$

606. Si la fonction φ doit être déterminée par la condition que la surface cônique soit tangente à une surface donnée ayant pour équation $\pi(x,y,z)=0$, on verra comme dans le n° 601, que l'on obtient une seconde équation $\psi(x,y,z)=0$ de la courbe de contact en prenant les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans l'équation donnée $\pi(x,y,z)=0$, et les substituant dans l'équation différentielle

$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c$. La question se trouve alors ramenée au cas du numéro précédent.

Surfaces de révolution.

607. Une surface de révolution est l'enveloppe de l'espace décrit par une sphère dont le centre se meut sur une ligne droite qui est l'axe de la surface, et dont le rayon varie suivant une loi quelconque. Soient

$$x'=\mathrm{A}z'+a$$
$$y'=\mathrm{B}z'+b$$

les équations données de l'axe de la surface. L'équation d'une sphère de rayon r, dont le centre est placé sur cet axe, sera

$$(x-\mathrm{A}z'-a)^2+(y-\mathrm{B}z'-b)^2+(z-z')^2=r^2,$$

x, y, z, représentant les coordonnées d'un point quelconque de la sphère. Cette équation appartient donc ici à l'enveloppée; z' et r sont les deux constantes arbitraires qui peuvent être déterminées de manière à donner une enveloppée quelconque. En différentiant l'équation dont il s'agit par rapport à x et à y, il vient

$$x-\mathrm{A}z'-a+(z-z')\frac{dz}{dx}=0$$

$$y-\mathrm{B}z'-b+(z-z')\frac{dz}{dy}=0\,;$$

et en éliminant z',

$$(y-b-\mathrm{B}z)\frac{dz}{dx}-(x-a-\mathrm{A}z)\frac{dz}{dy}=\mathrm{B}(x-a)-\mathrm{A}(y-b)$$

pour l'équation aux différences partielles appartenant à toutes les surfaces de révolution.

On peut obtenir la même équation en remarquant que, dans un point quelconque d'une surface de révolution, le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien, c'est-à-dire au plan mené par l'axe de la surface et par le point dont il s'agit. L'équation d'un plan méridien, passant par le point de la surface, dont les coordonnées sont x, y, z, peut être représentée par

$$z'-z=M(x'-x)+N(y'-y),$$

les constantes M.N étant déterminées de manière à faire passer également ce plan par l'axe de la surface. Cette condition donne la seconde équation

$$z'-z=M(Az'+a-x)+N(Bz'+b-y),$$

qui doit subsister quelle que soit z'. Elle se décompose donc dans les deux suivantes

$$1=MA+N, \quad \text{d'où} \quad M=\frac{y-b-Bz}{B(a-x)-A(b-y)}$$

$$-z=M(a-x)+N(b-y) \quad -N=\frac{x-a-Az}{B(a-x)-A(b-y)}.$$

Mais l'équation du plan tangent étant

$$z'-z=\frac{dz}{dx}(x'-x)+\frac{dz}{dy}(y'-y),$$

il sera penpendiculaire au plan méridien si l'on a la relation

$$M\frac{dz}{dx}+N\frac{dz}{dy}+1=0,$$

équation qui revient à la précédente quand on met à la place de M et N leurs valeurs.

On peut encore obtenir cette équation d'après la propriété générale des surfaces de révolution qui con-

siste en ce que la normale à un point quelconque rencontre toujours l'axe. Les équations de la normale sont en général

$$x'-x+\frac{dz}{dx}(z'-z)=0$$

$$y'-y+\frac{dz}{dy}(z'-z)=0:$$

et les mêmes valeurs de x', y', z' devront donc satisfaire à ces équations et à celles de l'axe. Si l'on élimine x', y', z' entre ces quatre équations, on retrouvera l'équation aux différences partielles dont il s'agit.

608. L'intégration de l'équation

$$\left(y-b-Bz\frac{dz}{dx}-x-a-Az\right)\frac{dz}{dy}=B(x-a)-A(y-b),$$

dépend, conformément aux nos 478 et suivants, des équations

$$(y-b-Bz)\,dy+(x-a-Az)\,dx=0$$
$$(y-b-Bz)\,dz-[B(x-a)-A(y-b)]\,dx=0$$
$$-(x-a-Az)\,dz-[B(x-a)-A(y-b)]\,dy=0$$

qui appartiennent à la caractéristique. Ces équations ne peuvent être immédiatement intégrées ; mais si l'on ajoute les deux dernières après avoir multiplié la première par A, et la seconde par B, puis si on les ajoute de nouveau après avoir multiplié la première par $x-a$ et la seconde par $y-b$, on trouvera

$$Adx+Bdy+dz=0$$
$$(x-a)\,dx+(y-b)\,dy+zdz=0\ ;$$

et en intégrant

$$Ax+By+z=\alpha$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=6\ ;$$

α et β étant deux constantes arbitraires. L'une de ces équations appartenant à un plan quelconque perpendiculaire à l'axe donné de la surface de révolution, l'autre à une sphère d'un rayon quelconque, dont le centre est placé au point, dont les coordonnées sont a,b,c, c'est-à-dire au point où cet axe rencontre le plan des x,y, on reconnaît que la caractéristique est toujours un cercle dont le centre est dans l'axe, et dont le plan est perpendiculaire à cet axe. On a d'ailleurs pour l'équation générale des surfaces de révolution

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(Ax+By+z),$$

φ désignant toujours une fonction arbitraire.

On obtient immédiatement cette équation en remarquant que si un point se déplace sur la surface sans sortir d'une même caractéristique, c'est-à-dire d'une même section faite perpendiculairement à l'axe, ou d'un parallèle, les quantités $Ax+By+z$ et $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2$ conserveront toutes deux des valeurs constantes; tandis qu'elles varieront toutes deux si le point se déplace en passant d'une caractéristique à une autre; d'où il suit que l'une de ces quantités est nécessairement fonction de l'autre.

609. La fonction arbitraire φ dans l'équation précédente peut être déterminée par la condition que la surface passe par une courbe quelconque donnée, dont les équations sont $\pi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$; c'est-à-dire que cette surface soit décrite par la révolution de la courbe autour de l'axe. Comme toutes les caractéristiques doivent rencontrer la courbe donnée, il doit exister des valeurs de x,y,z, qui satisfont à la fois aux quatre équations

$$\Pi(x,y,z)=0$$
$$\Psi(x,y,z)=0$$
$$Ax+By+z=\alpha$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(\alpha)$$

Éliminant x,y,z entre ces équations, il restera une relation entre α et $\varphi(\alpha)$, que nous désignons par $f[\alpha,\varphi(\alpha)]=0$, par laquelle la fonction φ est déterminée. L'équation de la surface demandée est

$$f[Ax+By+z,(x-a)^2+(y-b)^2+z^2]=0.$$

610. La fonction arbitraire peut également être déterminée dans l'équation du n° 608, par la condition que la surface de révolution enveloppe une surface quelconque donnée, dont l'équation est $\pi(x,y,z)=0$, c'est-à-dire soit décrite par la révolution de cette surface autour de l'axe. Il est visible que la surface de révolution demandée doit toucher la surface donnée, et qu'on aura une seconde équation primitive appartenant à la courbe de contact en prenant les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans l'équation $\pi(x,y,z)=0$, et les substituant dans l'équation différentielle

$$(y-b-Bz)\frac{dz}{dx}-(x-a-Az)\frac{dz}{dy}=B(x-a)-A(y-b),$$

Soit $\psi(x,y,z)=0$ le résultat de cette substitution : la solution s'achèvera conformément à ce qu'on a vu dans le numéro précédent.

Surface gauche décrite par une ligne droite horizontale, passant toujours par une même verticale.

611. Nous supposerons le plan des xy horizontal et

l'axe des z vertical, et nous considérerons la surface décrite par une ligne droite parallèle au plan des xy, et passant constamment par l'axe des z.

Considérons en premier lieu la surface qui serait l'enveloppe de l'espace décrit par un cylindre de rayon r, dont l'axe demeurerait toujours parallèle au plan des xy, et passerait constamment par l'axe des z. On aurait évidemment

$$\frac{(y-ax)^2}{a^2+1}+(z-c)^2=r^2$$

pour l'équation de ce cylindre, qui est l'enveloppée; a et c étant les deux constantes arbitraires, dont la première représente la tangente de l'angle formé par l'axe du cylindre avez le plan des xz, et la seconde la distance de cet axe au plan des xy. Prenant les deux équations différentielles, il viendra

$$-\frac{(y-ax)a}{a^2+1}+(z-c)\frac{dz}{dx}=0$$

$$\frac{y-ax}{a^2+1}+(z-c)\frac{dz}{dy}=0\ ;$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$(z-c)\left(\frac{dz}{dx}+a\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{dx}+a\frac{dz}{dy}=0,\quad \text{d'où}\quad a=-\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}$$

valeur qui doit être substituée dans l'équation de l'enveloppée. Mais si nous supposons le rayon r infiniment

petit, cas dans lequel l'enveloppe de l'espace décrit par le cylindre ne différera pas de la surface gauche dont il s'agit, nous devons négliger dans cette équation les termes $(z-c)^2$ et r^2; elle deviendra donc, en y remplaçant a par la valeur précédente,

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=0,$$

qui est l'équation aux différences partielles de cette surface gauche.

On pourrait parvenir directement au même résultat en partant de cette propriété générale des surfaces gauches qui consiste en ce que, pour un point quelconque de ces surfaces, le plan tangent contient la génératrice rectiligne qui passe par ce point. L'équation générale du plan tangent étant

$$z'-z=(x'-x)\frac{dz}{dx}+(y'-y)\frac{dz}{dy},$$

on a

$$(x'-x)\frac{dz}{dx}+(y'-y)\frac{dz}{dy}=0$$

pour l'équation de l'intersection de ce plan par un plan horizontal mené par le point de tangence. Or, cette intersection n'étant autre chose que la génératrice elle-même, qui doit rencontrer l'axe des z, son équation doit être satisfaite par les valeurs $x'=0$, $y'=0$, ce qui donne comme ci-dessus

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=0.$$

612. L'intégrale générale de cette équation s'obtiendra en posant

$$xdy - ydx = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{y}{x} = \alpha$$
$$dz = 0, \qquad z = \beta,$$

α et β étant deux constantes arbitraires ; ce qui donne

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

pour l'intégrale cherchée, φ étant le signe d'une fonction arbitraire. La considération de la caractéristique, qui est toujours une ligne droite horizontale ayant pour équations $\frac{y}{x} = \alpha$ et $z = \beta$, conduit directement à cette même équation.

613. Si la fonction arbitraire doit être déterminée de manière à faire passer la surface par une courbe quelconque ayant pour équations $\pi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$, on verra comme ci-dessus que l'on doit éliminer x,y,z entre les quatre équations

$$\Pi(x,y,z)=0$$
$$\Psi(x,y,z)=0$$
$$\frac{y}{x}=\alpha$$
$$z=\beta;$$

et qu'en représentant par $f(\alpha,\beta)=0$, le résultat de l'élimination, l'équation de la surface demandée est

$$f\left(\frac{y}{x}, z\right)=0.$$

614. Enfin, si la fonction arbitraire doit être déterminée de manière que la surface gauche, dont il

s'agit, touche et embrasse une surface donnée, ayant pour équation $\pi(x,y,z)=0$, on prendra les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans cette équation, et les substituant dans l'équation différentielle $x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=0$, on aura une seconde équation primitive $\psi(x,y,z)=0$, appartenant à la courbe de contact, ce qui ramène la question au cas du numéro précédent.

NOTES.

I.

Sur la formule de Maclaurin.

M. Cauchy a présenté le reste de la série de Maclaurin sous une forme nouvelle. Pour obtenir sa formule représentons par $\varphi(x, z)$ ou simplement par $\varphi(z)$ la quantité

$$f(x)-f(z)-\frac{x-z}{1}f'(z)-\ldots-\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(z)$$

qui s'évanouit pour $z=x$. En différentiant par rapport à z et omettant les termes qui se détruisent, on trouve

$$\varphi'(z)=-\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(z).$$

Mais par la formule de Taylor bornée à deux termes, et en observant que $z=x+(z-x)$, on a

$$\varphi(z)=\varphi(x)+(z-x)\varphi'(x+\theta_1(z-x)),$$

θ_1 désignant une quantité comprise entre 0 et 1. A cause de $\varphi(x)=0$, cette équation se réduit à

$$\varphi(z)=(z-x)\varphi'(x+\theta_1(z-x)),$$

puis, en remplaçant la fonction φ' par sa valeur, elle devient

$$\varphi(z) = \frac{\theta_1^{n-1}(x-z)^n}{1.2....(n-1)} f^{(n)}(x+\theta_1(z-x))$$

ou bien, en posant $\theta_1 = 1-\theta$,

$$\varphi(z) = \frac{(1-\theta)^{n-1}(x-z)^n}{1.2....(n-1)} f^{(n)}(z+\theta(x-z)):$$

Pour le cas particulier de $z=0$,

$$\varphi(0) = \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2...(n-1)} f^{(n)}(\theta x);$$

θ est, comme θ_1, compris entre 0 et 1 : $\varphi(0)$ est d'ailleurs la valeur de la quantité

$$f(x) - f(0) - \frac{x}{1}f'(0) - .... - \frac{x^{n-1}}{1.3...(n-1)} f^{(n-1)}(0)$$

par suite on a

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + ... + \frac{x^{n-1}}{1.2...(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2...(n-1)} f^{(n)}(\theta x).$$

Telle est la formule de M. Cauchy.

II.

Sur les fractions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Lorsque, pour une valeur particulière a de x, une fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, on obtient généralement la vraie valeur A de cette fraction en la remplaçant par la suivante

$$\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

et faisant ensuite $x=a$. La même règle s'applique encore à la fraction proposée lorsque, pour $x=a$, elle se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pour démontrer ce théorème dû, je crois, à M. Cauchy, écrivons d'abord

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}:$$

pour $x=a$, le second membre devient $\frac{0}{0}$; sa vraie valeur A s'obtiendra donc en faisant $x=a$ dans la fraction nouvelle

$$\frac{-\frac{F'(x)}{F(x)^2}}{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}} = \frac{F'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f(x)^2}{F(x)^2};$$

on a par suite

$$A = \frac{F'(a)}{f'(a)} \cdot A^2, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

En appliquant cette règle aux deux quantités

$$x^n \log. x, \quad \frac{\log. x}{x^n},$$

dont la première doit être regardée comme le quotient de log. x par $\frac{1}{x^n}$, on trouve, en supposant n positif,

$$x^n \log. x = -\frac{x^n}{n} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

et

$$\frac{\log. x}{x^n} = \frac{1}{n x^n} = 0 \text{ pour } x = \infty.$$

III.

Sur quelques intégrales définies.

1. Legendre a donné le nom d'intégrales eulériennes de première et de seconde espèce aux deux intégrales suivantes

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx,$$

qui se présentent souvent dans les applications et dont Euler s'est beaucoup occupé : p, q, n, sont des exposants positifs quelconques. On désigne ordinairement par $\Gamma(n)$ la seconde de ces intégrales, en sorte que

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx;$$

en posant $e^{-x}=z$, ou $x=y^2$, on a encore

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty\left(\log.\frac{1}{z}\right)^{n-1}dz=2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2n-1}dy.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\int e^{-x}x^{n-1}dx=\frac{e^{-x}x^n}{n}+\frac{1}{n}\int e^{-x}x^n dx:$$

donc, entre les limites $x=0$, $x=\infty$, il vient

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x}x^n dx,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n} \quad \text{ou} \quad \Gamma(n+1)=n\Gamma(n).$$

Cette formule permet de calculer la valeur de $\Gamma(n)$, quel que soit l'indice n, lorsque cette valeur est connue pour $n<1$. Elle donne successivement

$$\Gamma(2)=\Gamma(1),\quad \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2.1.\Gamma(1),$$
$$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3.2.1.\Gamma(1),\ldots\ldots$$
$$\Gamma(n)=(n-1)\ldots2.1.\Gamma(1);$$

or

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1.$$

Donc

$$\Gamma(n)=1.2.3\ldots(n-1),$$

n étant un nombre entier quelconque.

On trouve de même

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\ldots$$
$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Mais

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy=\sqrt{\pi}:$$

Donc en général

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}.$$

2. L'intégrale eulérienne de première espèce s'exprime toujours en fonctions Γ à l'aide de la formule suivante

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Cette formule est due à Euler. Voici comment M. Poisson la démontre par la considération des inté-

grales doubles. Il multiplie membre à membre les deux équations

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2p-1} dy,$$

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2q-1} dx,$$

et observe que le produit des deux seconds membres est égal à quatre fois l'intégrale double de

$$e^{-(y^2+x^2)} y^{2p-1} x^{2q-1} dy dx,$$

les limites de l'intégrale étant 0 et ∞ pour les deux variables. On a ainsi

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y^2+x^2)} y^{2p-1} x^{2q-1} dy dx.$$

Mais si l'on regarde x et y comme des coordonnées rectangulaires, et qu'on y joigne une troisième coordonnée z perpendiculaire aux deux autres, l'intégrale double dont nous venons de parler représentera le volume compris dans l'angle des coordonnées positives, entre les plans des xy, des xz, des yz et la surface dont l'équation est

$$z = e^{-(y^2+x^2)} y^{2p-1} x^{2q-1}.$$

L'expression de ce volume changera de forme si l'on remplace les coordonnées rectangulaires x et y par des coordonnées polaires r et ω, en faisant

$$x = r\cos.\omega, \qquad y = r\sin.\omega.$$

L'élément de volume sera $z \,.\, r dr d\omega$, et il faudra intégrer entre les limites

$$\omega = 0, \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \quad r = 0, \quad r = \infty.$$

On aura ainsi

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\,.\,rdrd\omega,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}.\,r^{2(p+q)-1}\sin.^{2p-1}\omega.\cos.^{2q-1}\omega.\,drd\omega,$$

en remplaçant z et ensuite y et x par leurs valeurs. L'intégrale double placée dans le second membre est le produit de deux intégrales simples, dont l'une, savoir

$$\int_0^\infty e^{-r^2}.\,r^{2(p+q)-1}dr$$

est égale à $\frac{1}{2}\Gamma(p+q)$, et dont l'autre, savoir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin.^{2p-1}\omega\cos.^{2q-1}\omega d\omega,$$

se réduit à

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

lorsqu'on pose $\sin.\,\omega=\sqrt{x}$. Il suit de là que

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx;$$

par suite on a

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

ce qui démontre la formule d'Euler. On voit par cette formule que l'intégrale eulérienne de première espèce

est une fonction symétrique de deux paramètres p et q dont elle dépend.

3. En généralisant la formule d'Euler, M. Lejeune Dirichlet a obtenu des résultats intéressants Il a considéré l'intégrale

$$(1) \qquad V=\int\int\ldots\int x^{a-1}y^{b-1}\ldots z^{c-1}dxdy\ldots dz,$$

dans laquelle les variables $x, y, \ldots z$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$(2) \qquad \left(\frac{x}{\alpha}\right)^p+\left(\frac{y}{\beta}\right)^q+\ldots+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^r<1:$$

$a, b, \ldots c, \alpha, \beta, \gamma, p, q, \ldots r$ sont des constantes positives. La méthode de M. Dirichlet l'a conduit à une valeur remarquable de V, savoir

$$(3) \qquad V=\frac{\alpha^a\beta^b\ldots\gamma^c}{pq\ldots r}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\ldots+\frac{c}{r}\right)},$$

que l'on peut, dit-il, obtenir par différents moyens, et qui renferme un grand nombre de résultats relatifs aux volumes, centres de gravité, moments d'inertie, etc. Cette formule peut se démontrer de la manière suivante.

4. D'abord en remplaçant

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p \text{ par } x, \quad \left(\frac{y}{\beta}\right)^q \text{ par } y, \ldots \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r \text{ par } z,$$

et dx, dy, ... dz par

$$\frac{\alpha}{p}x^{\frac{1}{p}-1}dx, \quad \frac{\beta}{q}y^{\frac{1}{q}-1}dy, \ldots \quad \frac{\gamma}{r}z^{\frac{1}{r}-1}dz,$$

on a

$$V = \frac{\alpha^a \beta^b \ldots \gamma^c}{pq \ldots r} . U,$$

U étant une intégrale

$$(4) \qquad \int\int \ldots \int x^{\frac{a}{p}-1} . y^{\frac{b}{q}-1} \ldots z^{\frac{c}{r}-1} . dx dy \ldots dz,$$

de même forme que V, mais dans laquelle $x, y, \ldots z$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$x+y+\ldots+z<1.$$

En posant

$$\frac{a}{p}=k, \frac{b}{q}=l, \ldots \frac{c}{r}=m,$$

il viendra

$$\int\int \ldots \int x^{k-1} . y^{l-1} \ldots z^{m-1} . dx dy \ldots dz,$$

et il s'agira de prouver que

$$(5) \qquad U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+\ldots+m)}.$$

5. Quand le nombre des variables x, y, etc., se réduit à l'unité, on a

$$U = \int_0^1 x^{k-1} dx = \frac{1}{k} = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(1+k)}:$$

la formule (5) est donc exacte alors.

Elle l'est également, d'après un théorème connu, lorsque le nombre des variables x, y, etc., se réduit à 2 : il vient dans ce cas

$$U = \int_0^1 x^{k-1} dx \int_0^{1-x} y^{l-1} dy = \frac{1}{l} \int_0^1 x^{k-1} . (1-x)^l . dx.$$

Or, par la formule d'Euler, on a

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^l.\,dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l)}{\Gamma(1+k+l)},$$

et il en résulte

$$U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l)}{l\Gamma(1+k+l)} = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(1+k+l)},$$

ce qui s'accorde avec la formule (5).

6. Supposons maintenant que U soit une intégrale triple : on pourra l'écrire ainsi

$$U = \int_0^1 x^{k-1} dx \int_0^{y_1} y^{l-1} dy \int_0^{z_1} z^{m-1} dz,$$

y_1 et z_1 représentant respectivement les différences $1-x$, $1-x-y$, en sorte que l'on a

$$1-x = y_1,\; y_1 - y = z_1.$$

Désignons par u et v de nouvelles variables, et posons

$$z = vz_1, \quad y = uy_1;$$

les limites communes de u et v seront 0 et 1 : l'intégrale U prendra ainsi la forme

$$U = \int_0^1 x^{k-1} dx \int_0^1 u^{l-1} y_1^l du \int_0^1 v^{m-1} z_1^m dv;$$

puis, à cause de

$$y_1 = 1-x, \quad z_1 = y_1 - uy_1 = (1-x)(1-u),$$

elle deviendra

$$U = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m} dx . \int_0^1 u^{l-1}(1-u)^m du . \int_0^1 v^{m-1} dv.$$

Les intégrations relatives aux diverses variables peuvent maintenant s'effectuer indépendamment l'une de l'autre, et comme on a

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m}dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l+m)}{\Gamma(1+k+l+m)},$$

$$\int_0^1 u^{l-1}(1-u)^m du = \frac{\Gamma(l)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+l+m)}, \quad \int_0^1 v^{m-1}dv = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1+m)},$$

la valeur de U sera finalement

$$U = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+m)},$$

conformément à la formule (5).

S'il y a quatre variables indépendantes x, y, z, t, dans l'intégrale U, la valeur de cette intégrale s'obtiendra encore par le même procédé. On supposera les intégrations effectuées successivement sur t, z, y et x, et l'on posera

$$1-x=y_1, y_1-y=z_1, z_1-z=t_1,$$

les limites relatives à t, z, y et x seront respectivement 0 et t_1, 0 et z_1, 0 et y_1, 0 et 1 : si donc on remplace t, z et y par de nouvelles variables liées aux premières par les relations

$$t = wt_1, \quad z = vr_1, \quad y = uy_1,$$

les limites communes à ces nouvelles variables seront 0 et 1 : de plus on aura

$$y_1 = 1-x, \; z_1 = (1-x)\,(1-u), \; t_1 = (1-x)\,(1-u)\,(1-v);$$

par conséquent, les variables x, u, v, w pourront être

séparées; en d'autres termes l'intégrale multiple U se décomposera dans un produit de quatre intégrales qui toutes s'exprimeront par des fonctions Γ à l'aide de la formule (6). Cette méthode est générale, et quel que soit le nombre des variables x, y, etc., elle conduit à la formule (5) qui se trouve ainsi démontrée.

IV.

Sur l'évaluation approchée du produit 1.2.3...x, lorsque x est très-grand.

1. La méthode dont je me servirai pour démontrer la formule de Stirling qui sert à cette évaluation, ressemble beaucoup à celle employée par M. Lacroix dans son *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* (page 678 de la cinquième édition). Cette méthode consiste à chercher le logarithme du produit 1.2.3...x et elle repose sur la formule connue de Wallis

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2x}{2x-1}\cdot\frac{2x}{2x+1}\cdots\cdots$$

en vertu de laquelle la quantité

$$\begin{array}{l}2\log.2+2\log.4+\ldots\ldots+2\log.(2x-2)+\log.(2x)\\ -2\log.1-2\log.3-\ldots\ldots-2\log.(2x-3)-\log.(2x-1)\end{array}$$

se réduit à $\log.\pi-\log.2$ lorsque $x=\infty$. Mais je la compléterai en donnant une limite supérieure de l'erreur commise dans l'évaluation approchée de $\log.(1.2.3\ldots x)$.

2. Pour toute valeur positive de z, on a

$$\frac{1}{z}=\int_0^\infty e^{-\alpha z}d\alpha,$$

d'où résulte, en intégrant par rapport à z,

$$(1)\qquad \log.z=\int_0^\infty\frac{(e^{-\alpha}-e^{-\alpha z})d\alpha}{\alpha}.$$

Faisant successivement, dans cette formule, $z=1$, $z=2$,.... $z=x$, puis ajoutant les résultats ainsi obtenus, il nous viendra

$$(2) \qquad \log.(1.2.3\ldots x)=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha}d\alpha}{\alpha}\left(x-\frac{1-e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}\right).$$

Ainsi la question est ramenée à trouver la valeur de l'intégrale définie placée dans le second membre de l'équation (2). Représentons cette intégrale par u et traitons x comme une variable continue. En différenciant nous obtiendrons

$$\frac{du}{dx}=\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha}-\frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^{\alpha}-1}\right).$$

3. La fonction $\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}$ qui sert de coëfficient à $e^{-\alpha x}$ et que nous désignerons par $f(\alpha)$ peut se développer en une série ordonnée suivant les puissances de α. En différenciant plusieurs fois de suite l'équation

$$(e^{\alpha}-1)f(\alpha)=\alpha,$$

on a

$$(e^{\alpha}-1)f'(\alpha)+e^{\alpha}f(\alpha)=1,$$
$$(e^{\alpha}-1)f''(\alpha)+2e^{\alpha}f'(\alpha)+e^{\alpha}f(\alpha)=0,$$
$$(e^{\alpha}-1)f'''(\alpha)+3e^{\alpha}f''(\alpha)+3e^{\alpha}f'(\alpha)+e^{\alpha}f(\alpha)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de sorte qu'en posant $\alpha=0$ on trouve sans difficulté

$$f(0)=1,\quad f'(0)=-\frac{1}{2},\ f''(0)=\frac{1}{6},\ldots..$$

Les deux premiers termes du développement de $f(\alpha)$

sont donc $1-\frac{\alpha}{2}$; et les autres ne peuvent contenir que des puissances paires de α, car la différence

$$f(\alpha)-1+\frac{\alpha}{2}$$

est égale à la moitié de

$$\frac{\alpha\left(e^{\frac{\alpha}{2}}+e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)}{e^{\frac{\alpha}{2}}-e^{-\frac{\alpha}{2}}}-2,$$

et par conséquent est une fonction paire de α.

Les valeurs générales de $f'(\alpha)$ et de $f''(\alpha)$ sont

$$f'(\alpha)=\frac{e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)^{3}}\left((\alpha-2)e^{\alpha}+\alpha+2\right),$$

$$f''(\alpha)=-\frac{e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)^{4}}\left((\alpha-3)e^{2\alpha}+4\alpha e^{\alpha}+\alpha+3\right).$$

En se rappelant que la variable α est >0, on peut prouver que la première de ces deux dérivées est essentiellement positive et la seconde essentiellement négative.

D'abord en posant

$$P=(\alpha-2)e^{\alpha}+\alpha+2,$$

on a

$$\frac{dP}{d\alpha}=(\alpha-1)e^{\alpha}+1,\qquad \frac{d^{2}P}{d\alpha^{2}}=\alpha e^{\alpha}.$$

Pour toute valeur de $\alpha>0$, on a $\frac{d^{2}P}{d\alpha^{2}}>0$: on a aussi $\frac{dP}{d\alpha}>0$ et $P>0$ puisque $\frac{dP}{d\alpha}$ et P s'annullent pour $\alpha=0$

et prennent ensuite le signe de leurs dérivées. Il suit évidemment de là que $f''(x)$ est une quantité positive.

Posons maintenant

$$P = (x-3)e^{2x}+4xe^{x}+x+3,$$

ce qui donne

$$\frac{dP}{dx} = (2x-5)e^{2x}+(4x+4)e^{x}+1,$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = (4x-8)e^{2x}+(4x+8)e^{x});$$

en faisant

$$Q = (x-2)\,e^{x}+x+2,$$

nous aurons

$$\frac{d^2P}{dx^2} = 4e^{x}Q,$$

de manière que les deux fonctions Q et $\frac{d^2P}{dx^2}$ seront de même signe. Or, Q et $\frac{dQ}{dx}$ sont zéro pour $x=0$; de plus $\frac{d^2Q}{dx^2}$ est <0 dès que x surpasse zéro : donc il en est de même de Q et de $\frac{d^2P}{dx^2}$; par suite la fonction P jouit aussi de la même propriété puisque l'on a $P=0$ et $\frac{dP}{dx}=0$ quand $x=0$; il suit évidemment de là que $f'''(x)$ est une quantité négative.

On voit d'après cela que $f''(x)$ est une fonction décroissante de x dont la plus grande valeur est égale à $f''(0)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{6}$.

4. Après cette digression revenons au développement

de $f(\alpha)$. D'après une formule connue, nous pourrons écrire

$$\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}=1-\frac{\alpha}{2}.$$

R représentant, suivant que l'on voudra pousser le développement plus ou moins loin, ou la quantité

$$\frac{\alpha^2}{1.2}f''(\theta\alpha),$$

ou la quantité

$$\frac{\alpha^2 f''(0)}{2}+\ldots\ldots+\frac{\alpha^{2n}f^{2n}(0)}{1.2\ldots 2n}+\frac{\alpha^{2n+2}f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2\ldots(2n+2)};$$

c'est ce que l'on comprendra en se rappelant que R est une fonction paire de α : à peine est-il nécessaire d'avertir que θ représente d'une manière générale un certain nombre compris entre 0 et 1. Cette valeur de $f(\alpha)$ substituée dans celle de $\frac{du}{dx}$ fournit

$$\frac{du}{dx}=\int_0^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha}-e^{-\alpha x}+\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha x}-\mathrm{R}\,e^{-\alpha x}\right),$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (1)

$$\frac{du}{dx}=\log.x+\frac{1}{2x}-\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha}.$$

Par conséquent

$$u=\mathrm{C}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.x-x+\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2},$$

cette valeur de u est en même temps celle de

log. (1.2.3...x). Nous prouverons plus tard que la constante C est égale à log. $(\sqrt{2\pi})$.

5. On trouve aisément les limites de l'erreur que l'on commettrait en négligeant dans le second membre le terme

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2}:$$

à cause de

$$\mathrm{R} = \frac{\alpha^2 f''(\theta\alpha)}{2},$$

ce terme devient

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x} f''(\theta\alpha)\,d\alpha.$$

Il est donc essentiellement positif comme la fonction $f''(\theta\alpha)$. De plus, il est moindre que

$$\frac{1}{12}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,d\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{1}{12x},$$

puisque l'on a $f''(\theta\alpha) < \frac{1}{6}$.

Cette discussion nous montre qu'en désignant par μ un certain nombre compris entre 0 et 1, on peut poser

$$\log.(1.2.3\ldots x) = \mathrm{C} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log.x - x + \frac{\mu}{12x}.$$

6. Si l'on prend

$$\mathrm{R} = \frac{\alpha^2 f''(0)}{1.2} + \ldots + \frac{\alpha^{2n} f^{2n}(0)}{1.2\ldots 2n} + \frac{\alpha^{2n+2} f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2\ldots(2n+2)},$$

le terme

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2}$$

se présentera sous une autre forme ; il deviendra

$$\frac{f'(0)}{2x}+\ldots+\frac{f^{2n}(0)}{2n(2n-1)x^{2n-1}}+\int_0^\infty \frac{e^{-2\pi\alpha}\alpha^{2n}f^{2n+2}(\theta x)d\alpha}{1.2\ldots(2n+2)},$$

et si l'on veut avoir une limite supérieure de la valeur absolue de l'intégrale dont il dépend, il suffira de remplacer $f^{2n+2}(\theta x)$ par le maximum absolu M de $f^{2n+2}(x)$, ce qui permettra d'effectuer l'intégration.

7. Pour déterminer la constante C, mettons l'équation

$$\log.(1.2.3..x)=C+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.x-x+\frac{\mu}{12x}$$

sous la forme

$$\log.1+\log.2+\log.3+\ldots+\log.x=C+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.x-x+\text{etc.}$$

le signe etc. désignant un terme qui s'annule quand $x=\infty$.

Nous en tirerons facilement

$$\log.1+\log.2+\log.3+\ldots+\log.2x=C+\left(2x+\frac{1}{2}\right)\log.2x-2x+\text{etc.}$$

A cause de

$$\log.2+\log.4+..+\log.2x=x\log.2+\log.1+\log.2+\ldots+\log.x,$$

nous aurons aussi

$$\log.2+\log.4+\log.6+..+\log.2x=C+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.x+x\log.2-x+\text{etc.}$$

Retranchant cette équation de celle qui donne la somme des logarithmes des nombres naturels depuis 1 jusqu'à $2x$, on obtient

$$\log.1+\log.3+5+\ldots+\log.(2x-1)=x\log.x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.2-x+\text{etc.}$$

Retranchant à son tour le double de cette nouvelle équation du double de la précédente, il vient enfin

$$2\log.2+2\log.4+2\log.6+\ldots+2\log.(2x-2)+\log.2x$$
$$-2\log.1-2\log.3-2\log.5-\ldots-2\log.(2x-3)-2\log.(2x-1)$$
$$=2C-2\log.2+\text{etc.}$$

de sorte qu'à l'aide de la formule de Wallis citée plus haut, on trouve en faisant x infini,

$$\log.\pi-\log.2=2C-2\log.2,$$

et par suite

$$C=\frac{1}{2}(\log.\pi+\log.2)=\log.(\sqrt{2\pi}).$$

Nous devons dire en terminant que M. Binet a traité la question précédente et plusieurs autres du même genre dans un mémoire considérable destiné au *Journal de l'École polytechnique*.

V.

Sur une application singulière de la théorie des intégrales doubles à la démonstration d'un théorème d'algèbre

En désignant par ρ et ω les coordonnées polaires d'un point pris dans un plan fixe horizontal, et par z une fonction réelle et déterminée de ρ et ω, qui ne devient pas infinie entre les limites 0 et R de ρ, 0 et 2π de ω, on voit que les deux intégrales doubles

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} z d\omega, \quad \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho$$

sont nécessairement égales entre elles, puisqu'elles représentent toutes deux un même volume; savoir, le volume compris entre le plan fixe, la surface cylindrique droite ayant pour base un cercle de rayon R tracé autour de l'origine des coordonnées prise pour centre, et une autre surface dont l'ordonnée verticale est pour chaque système de valeurs des deux quantités ρ et ω représentée par z. Or, on peut de là conclure, avec M. Gauss, que le premier membre de toute équation algébrique à coefficients réels

$$z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \ldots + Lz + M = 0$$

est divisible soit par un facteur réel du premier degré $z \mp \rho$, soit par un facteur réel du second degré $z^2 - 2\rho z \cos.\omega + \rho^2$, en sorte que cette équation a toujours au moins une racine réelle ou imaginaire, savoir $\pm \rho$ ou $\rho(\cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega)$.

En d'autres termes, on peut prouver qu'il existe tou-

jours des valeurs réelles des deux quantités ρ et ω satisfaisant à la fois aux deux équations

$$\rho^m \cos. m\omega + A\rho^{m-1} \cos. (m-1)\omega + \ldots + L\rho \cos. \omega + M = 0,$$
$$\rho^m \sin. m\omega + A\rho^{m-1} \sin. (m-1)\omega + \ldots + L\rho \sin. \omega = 0.$$

Désignons en effet par t et u les premiers membres de ces équations, puis posons

$$t' = \frac{du}{d\omega} = \rho \frac{dt}{d\rho}, \; u' = -\frac{dt}{d\omega} = \rho \frac{du}{d\rho},$$
$$t'' = \frac{du'}{d\omega} = \rho \frac{dt'}{d\rho}, \; u'' = -\frac{dt'}{d\omega} = \rho \frac{du'}{d\rho}.$$

Soit R une quantité positive quelconque, mais plus grande que la plus grande des quantités

$$mA'\sqrt{2}, \; \sqrt{mB'\sqrt{2}}, \; \sqrt[3]{mC'\sqrt{2}}, \ldots\ldots \sqrt[m]{mM'\sqrt{2}}$$

où A′, B′, C′,… M′ désignent les valeurs absolues des coefficients A,B,C,…M. Cela étant, je dis que si l'on pose $\rho = R$, la somme $tt' + uu'$ aura une valeur positive. Pour le montrer, observons d'abord que les quatre quantités suivantes

$$R^m \cos. \frac{\pi}{4} + AR^{m-1} \cos. \left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) + \ldots + M \cos. \left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right)$$
$$R^m \sin. \frac{\pi}{4} + AR^{m-1} \sin. \left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) + \ldots + M \sin. \left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right)$$
$$mR^m \cos. \frac{\pi}{4} (+m-1) AR^{m-1} \cos. \left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) + \ldots + LR \cos. \left(\frac{\pi}{4} + (m-1)\omega\right)$$
$$mR^m \sin. \frac{\pi}{4} + (m-1) AR^{m-1} \sin. \left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) + \ldots + LR \sin. \left(\frac{\pi}{4} + (m-1)\omega\right)$$

que je nommerai respectivement T, U, T′, U′, sont toutes > 0 : on le prouve, par exemple, pour la première, en décomposant T sous cette forme

$$\frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}\left[R+mA\sqrt{2}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)\right]$$
$$+\frac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}\left[R^2+mB\sqrt{2}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+2\omega\right)\right]$$
$$+\frac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}\left[R^3+mC\sqrt{2}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+3\omega\right)\right]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et en se rappelant ce que l'on a dit ci-dessus de la grandeur de R. Une démonstration semblable s'applique aux trois autres sommes U, T', U'.

Or, pour $\rho=R$, on a

$$t=T\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)+U\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$
$$u=T\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)-U\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$
$$t'=T'\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)+U'\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$
$$u'=T'\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)-U'\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right),$$

et de là résulte $tt'+uu'=TT'+UU'$: donc $tt'+uu'$ est >0. On peut observer en passant que nos équations donnent en outre $t^2+u^2=T^2+U^2$.

Maintenant on peut prouver le théorème qui fait l'objet de cette note ; savoir qu'*entre les limites* $\rho=0$, $\rho=R$, $\omega=0$, $\omega=2\pi$, *il existe certaines valeurs de* ω *et de* ρ *pour lesquelles on a à la fois* $t=0$, $u=0$. Car, si l'on n'admet pas ce théorème, il faudra en conclure que la fraction

$$z=\frac{(t^2+u^2)(tt''+uu'')+(tu'-ut')^2-(tt'+uu')^2}{\rho(t^2+u^2)^2}$$

ne deviendra pas infinie entre les limites citées, et que, par suite, on aura

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} z d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho.$$

Or

$$\int z d\omega = \frac{tu' - ut'}{\rho(t^2+u^2)},$$

comme on le vérifie aisément par la différentiation : de plus, t, u, t', u', reprennent les mêmes valeurs aux deux limites 0 et 2π : par suite, on a

$$\int_0^{2\pi} z d\omega = 0,$$

en sorte que la première de nos deux intégrales doubles se réduit à zéro. Mais la seconde est au contraire essentiellement >0. En effet, si l'on intègre d'abord par rapport à ρ, il vient

$$\int z d\rho = \frac{tt' + uu'}{t^2+u^2} :$$

d'où

$$\int_0^R z d\rho = \frac{TT' + UU'}{T^2+U^2},$$

et partant

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{(TT' + UU')d\omega}{T^2+U^2},$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho = \text{une quantité positive},$$

puisque l'élément

$$\frac{(TT'+UU')d\omega}{T^2+U^2}$$

est essentiellement positif. Donc l'équation

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} z d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho$$

est impossible; donc aussi la fraction z devient infinie une ou plusieurs fois, et par suite t et u s'annulent ensemble pour des valeurs réelles de ρ et ω, C, Q, F, D.

Si l'on pose log. $\rho = \theta$ ou $\rho = e^\theta$, on voit de suite que t et u sont les deux dérivées par rapport à ω et θ d'une même intégrale

$$\varphi = \frac{e^{m\theta}\sin. m\omega}{m} + \frac{Ae^{(m-1)\theta}\sin.(m-1)\omega}{m-1} + \ldots\ldots + Le^\theta \sin.\omega + M\omega$$

de l'équation $\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = 0$: d'après un théorème démontré par M. Lamé dans le *Journal de l'École polytechnique*, cette équation sera donc aussi satisfaite par $\varphi = \log.\sqrt{t^2+u^2}$. Ainsi les deux quantités

$$\frac{d^2\log.\sqrt{t^2+u^2}}{d\theta^2},\quad -\frac{d^2\log.\sqrt{t^2+u^2}}{d\omega^2}$$

sont égales entre elles : leur valeur commune est précisément celle du produit ρz.

VI.

Sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles.

Soit

(1) $$f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$$

une équation différentielle de l'ordre n, y', y'', $\ldots y^{(n)}$ étant les dérivées successives de y. L'intégrale complète de cette équation (intégrale que je suppose connue) contiendra n constantes arbitraires $a, b, \ldots c$, et sera de la forme $y = \mathrm{F}(x, a, b, \ldots c)$ ou plutôt $\pi(x, y, a, b, \ldots c) = 0$. Maintenant différentions par rapport à a les deux membres de l'équation (1), et représentons par u la dérivée $\frac{dy}{da}$. Il nous viendra

(2) $$\frac{df}{dy} \cdot u + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{du}{dx} + \ldots + \frac{df}{dy^{(n)}} \cdot \frac{d^n u}{dx^n} = 0.$$

On aurait eu la même équation si, au lieu de poser $\frac{dy}{da} = u$, on avait posé $\frac{dy}{db} = u$ ou $\frac{dy}{dc} = u$. Donc les dérivées de y prises par rapport aux n constantes $a, b, \ldots c$, représentent autant d'intégrales particulières de l'équation linéaire (2); de sorte qu'en général l'intégrale complète de cette équation (2) est

$$u = \mathrm{A} \frac{dy}{da} + \mathrm{B} \frac{dy}{db} + \ldots + \mathrm{C} \frac{dy}{dc},$$

A, B, … C étant des constantes arbitraires.

Ce théorème, aussi simple que remarquable, est dû à M. Jacobi. Il s'étend de lui-même à un système quelconque d'équations différentielles simultanées. Pour l'appliquer à un exemple, considérons le cas particulier où l'équation (1) est de la forme

$$y''-\varphi(y)=0\,;$$

cette équation peutalors s'intégrer, car, en la multipliant par $2dy$, elle nous donne

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\varphi(y)dy=0,$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=a+2\int\varphi(y)dy,$$

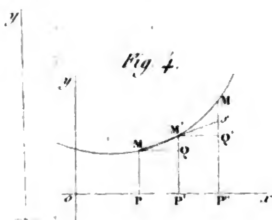
et par suite

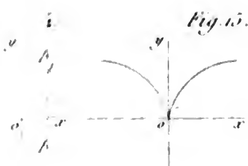
(3) $$x=b+\int\frac{dy}{\sqrt{a+2\int\varphi(y)\,dy}}.$$

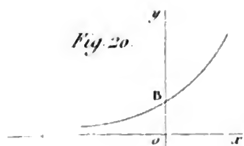
En vertu de cette dernière équation, y est une fonction de x, a, b. Or, il suit du théorème de M. Jacobi que l'équation linéaire $\frac{d^2u}{dx^2}=\varphi'(y)\,u$ où $\varphi'(y)$ désigne la dérivée de y, aura une intégrale complète de la forme $u=\mathrm{A}\,\frac{dy}{da}+\mathrm{B}\,\frac{dy}{db}$, quelle que soit la fonction φ.

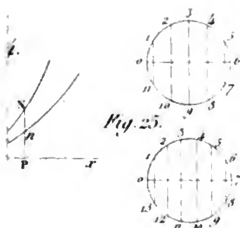
FIN.

PARIS.—IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT.
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.









Gravé par Adam

à
co
l'a
lie

ce
pa

d'

et

(3

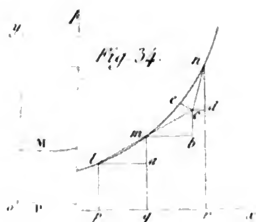
E
de

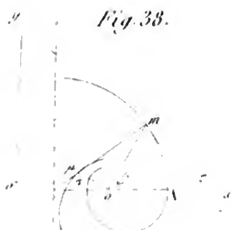
q

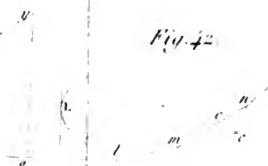
de

+









Gravé par Adam

à
c
l'
L

c
F

d

e
(

F
d
q
d




UNIV.
OF
MICH.

OUVRAGES PUBLIÉS PAR LES MÊMES ÉDITEURS.

NAVIER, *de l'Académie des sciences, inspecteur divisionnaire des ponts et chaussées, professeur aux Écoles polytechnique et des ponts et chaussées.* **RÉSUMÉ DES LEÇONS DE MÉCANIQUE** données à l'École Polytechnique. 1 vol. in-8 en 2 parties. (*Sous presse.*)

— Résumé des **LEÇONS DONNÉES A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES, SUR L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE** à l'établissement des constructions et des machines. 2 vol. in-8. 18 fr.

Le *tome* 1[er], contenant les leçons sur la **RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX** et sur l'établissement des constructions en terre, en maçonnerie et en charpente. 2[e] éd. 1 vol. in-8, avec pl. 1836. 9 fr.

Le *tome* 2, contenant 1° les leçons sur le mouvement et la résistance des **FLUIDES**, et sur la conduite et la distribution des eaux; 2° celles sur l'**ÉTABLISSEMENT DES MACHINES**, in-8, avec pl. 9 fr.

— **RAPPORT** à M. le conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines, et mémoire sur les **PONTS SUSPENDUS**, 2[e] édition, augmentée d'une notice sur le pont des Invalides. 1 vol. in-4, avec atlas de 17 planches grand in-folio. 1830. 18 fr.

— Considérations sur les principes de la **POLICE DU ROULAGE** et sur les travaux d'**ENTRETIEN DES ROUTES**; suivies d'un appendice contenant un extrait de diverses enquêtes parlementaires anglaises, ainsi que du nouveau traité des routes de sir Henry Parnell, et l'instruction officielle pour la direction des travaux de la route d'Holyhead. 1 vol. in-8., avec pl. 3 fr. 50 c.

NOUVELLES PUBLICATIONS.

PONTÉCOULANT (G. de), *membre de la Société royale de Londres, des Académies des sciences de Berlin, Palerme, etc., etc.* Traité élémentaire de **PHYSIQUE CÉLESTE**, ou Précis d'**ASTRONOMIE THÉORIQUE ET PRATIQUE**, servant d'introduction à l'étude de cette science; ouvrage destiné aux personnes peu versées dans l'étude des sciences mathématiques et qui désirent acquér[illegible] sans leur secours, des notions exactes sur la constitution de l'unive[illegible] vol. in-8°, avec pl. 18[illegible]

CLINCHAMP (V. de). *A*[illegible] **NOUVEAU TRAITÉ D**[illegible] tist[illegible] [illegible] [illegible]ations de géométrie [illegible]iques problèmes mis à la portée de [illegible] le monde [illegible] d'un atlas de planches gravées. 12 fr. 50 c.

[illegible] (J.-[illegible] **CALCULATEUR**, contenant, 1° les principes du c[illegible] un *exposé du système métrique*; 3° une collection com[illegible]aux tableaux et de nouvelles tables pour abréger et facil[illegible] de calcul. Ouvrage nécessaire à toutes les personne[illegible]aux opérations financières et industrielles; aux entr[illegible]ecteurs de travaux, arpenteurs, toiseurs, géomè[illegible] 3[e] *Édition stéréotype.* 7 fr.

[illegible] de FAIN et THUNOT, imprimeurs de l'Université, rue Racine, 28.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06358 3887